

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА

Методичні вказівки

до самостійної роботи з розділу

"Основи розрахунку на міцність"

курсу прикладної механіки

(для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності
6.050702 «Електромеханіка» та для слухачів другої вищої освіти)

Методичні вказівки для самостійної роботи з розділу "Основи розрахунку на міцність" курсу прикладної механіки (для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 6.050702 "Електромеханіка" та для слухачів другої вищої освіти) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Шпачук В.П., Кузнецов О.М. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 49 с.

Укладачі: В.П. Шпачук, О.М. Кузнецов

Рецензент: докт. техн. наук, проф. І.Г. Міренський

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 14 від 29.06.2007 р.

Ці методичні вказівки призначені для підвищення ефективності самостійної роботи студентів у позааудиторний час і при спілкуванні з викладачем, містять по тридцять варіантів задач за трьома темами розділу "Основи розрахунку на міцність": "Розтяг (стиск) прямих стержнів", "Кручення прямих валів", "Згин". Для кожної теми розглянуто приклади розв'язання задач. Під час самостійного засвоєння теми студентам рекомендується закріплювати знання теоретичного матеріалу, розібрати відповідний приклад і розв'язати кілька задач із запропонованих тридцяти варіантів.

Матеріали цих вказівок можуть бути використані викладачами кафедри при проведенні самостійних і контрольних робіт в аудиторії, під час захисту розрахунково-графічних робіт, курсових проектів, комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Ці методичні вказівки складено з метою допомогти студентам спеціальності "Електричний транспорт" у самостійній роботі, під час підготовки до занять, виконання контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістових модулів, складання заліків та іспитів з прикладної механіки.

1. РОЗТЯГ (СТИСК) ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

Розтягом або стиском називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки поздовжня сила. Бруси з прямолінійною віссю (прямі бруси), які зазнають розтягу або стиску, називають стержнями.

Розглянемо невагомий, затиснутий верхнім кінцем прямий брус, вздовж осі якого діють активні сили F_1 і F_2 (рис.1.Т).

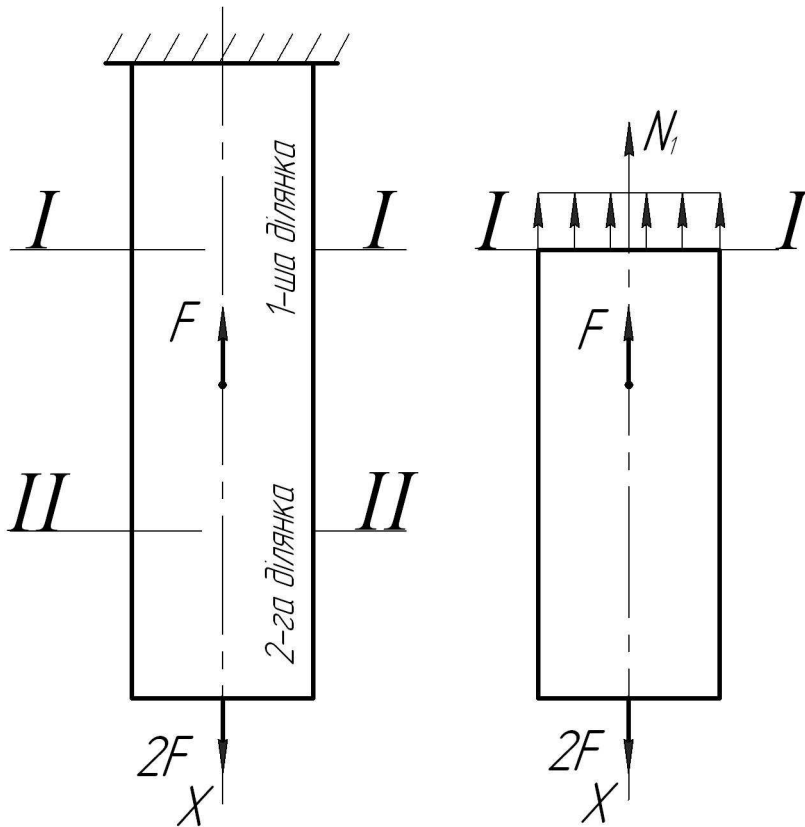


Рис.1.Т

Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні, називатимемо ділянками. Зображений на рис.1.Т брус складається з двох ділянок. Застосувавши метод перерізів, визначимо поздовжні сили N_1 і N_2 на ділянках. Зробимо поперечний переріз I-I верхньої ділянки бруса.

В усіх точках бруса діяти-

муть внутрішні розподілені сили, рівнодіюча яких визначається з умови рівноваги однієї з частини бруса.

$$N_1 = 2F - F = F$$

Отже, для рівноваги залишеної частини бруса в перерізі I-I треба прикласти тільки силу N_1 , напрямлену вздовж осі, тобто поздовжню силу. Поздовжня сила – це рівнодіюча внутрішніх нормальних сил, які виникають у поперечному перерізі бруса. В перерізі II-II на нижній ділянці поздовжня сила матиме інше значення:

$$N_2=2F.$$

Розтягуючі (напрявлені від перерізу) поздовжні сили вважатимемо додатніми, а стискаючі (напрявлені до перерізу) – від’ємними.

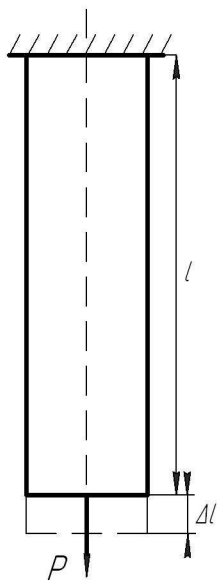
Під час розтягу і стиску в поперечних перерізах бруса виникають нормальні напруження, які рівномірно розподілені в перерізі, їх обчислюють за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

де N – поздовжня сила; A – площа поперечного перерізу.

Для наочного зображення розподілу по осі бруса поздовжніх сил і нормальних напружень будують графіки, які називають епюрами, при чому для нормальних напружень застосовують те саме правило знаків, що і для поздовжніх сил.

Перейдемо до розгляду деформацій. Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу A , що має довжину L , жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці розтягуючою силою P (рис.2.Т).



Під дією цієї сили брус видовжиться на деяку величину ΔL , яку назвемо абсолютним видовженням. Відношення абсолютного видовження ΔL до початкової довжини L назвемо відносним видовженням ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Внаслідок деформації поперечні перерізи бруса переміщуються в напрямку осі. Взаємне переміщення двох перерізів дорівнює зміні довжини частини бруса, що лежить між

Рис.2.Т цими перерізами.

Напруження і деформації розтягу і стиску, пов'язані між собою законом Гука, можна записати у вигляді рівності:

$$\sigma = E\varepsilon$$

де E – модуль поздовжньої пружності або модуль пружності першого роду.

Якщо у формулу закону Гука підставити вирази

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

то дістанемо:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}$$

Коефіцієнт запасу міцності S для пластичних матеріалів

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}$$

де σ_T - границя текучості;

σ_{\max} - найбільше напруження.

Розрахункова формула на міцність для розтягу або стиску має вигляд

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

де $[\sigma]$ - допустимі напруження розтягу або стиску.

1.1. Приклад виконання завдання

Приклад. Для заданої схеми ступінчатого стержня (рис 1.1) за одним із варіантів, які наведені в табл.1.1, побудувати епюру поздовжніх сил, епюру нормальних напружень, обчислити переміщення вільного кінця сталевого стержня ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$), побудувати епюру переміщень, обчислити коефіцієнт запасу міцності S по відношенню до межі текучості $[\sigma_T] = 240 \text{ Н/мм}^2$ [1].

Розглянемо випадок центрального осьового розтягу (стиску) ступінчастого стержня (рис.1.2), коли зовнішні сили діють по осі невагомому стержню (варіант 30, табл.1.1).

Для побудови епюри внутрішніх поздовжніх сил застосовуємо метод перерізів [2].

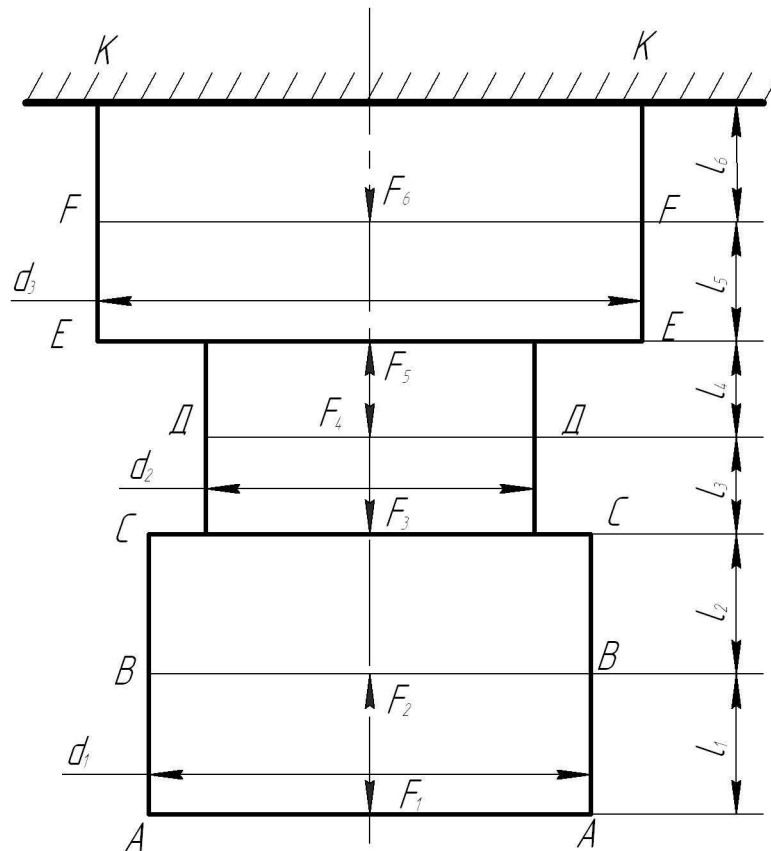


Рис. 1.1

Проведемо переріз I – I і розглянемо рівновагу нижньої відсіченої частини (рис.1.3). Вплив верхньої відкинутої частини на нижню замінимо силою N_1 (завчасно направивши її від перерізу вгору, тобто уявивши, що сила є розтягуючою). Складемо рівняння рівноваги:

$$N_1 - F_1 = 0,$$

зв'ідки

$$N_1 = F_1 = 40 \text{ кН.}$$

Знак "плюс" показує, що напрямок сили N_1 обрано вірно, тобто що поздовжня сила буде у даному випадку розтягуючою, як ми і припускали. Аналогічно знайдемо поздовжню силу в інших перерізах (між точками, де прикладені зовнішні сили).

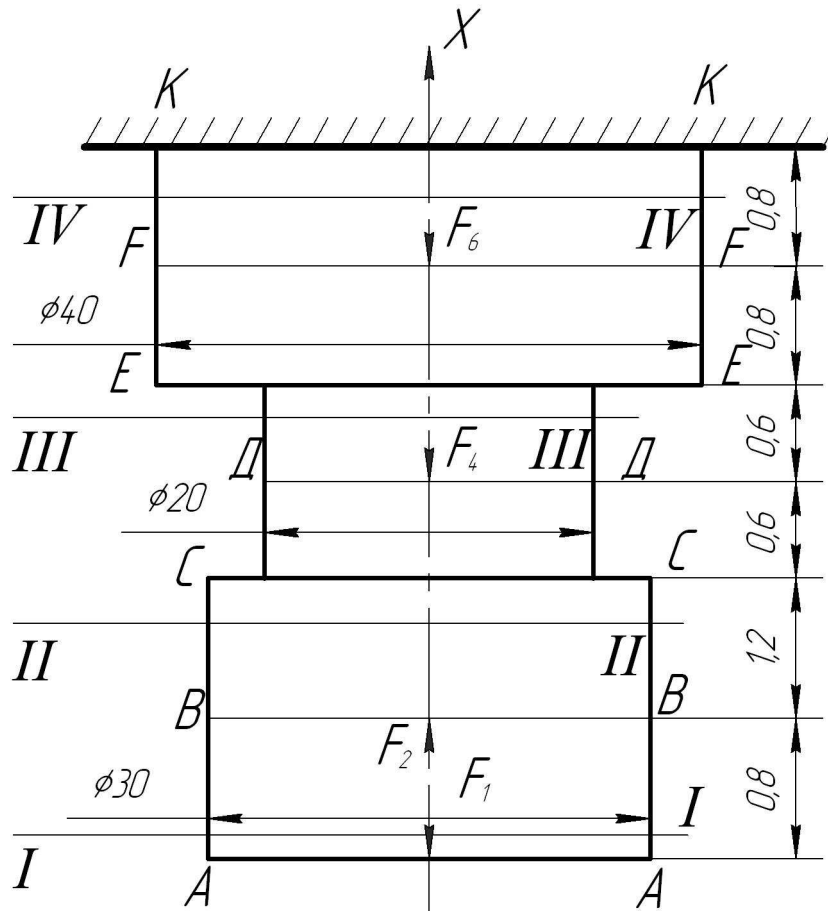


Рис. 1.2

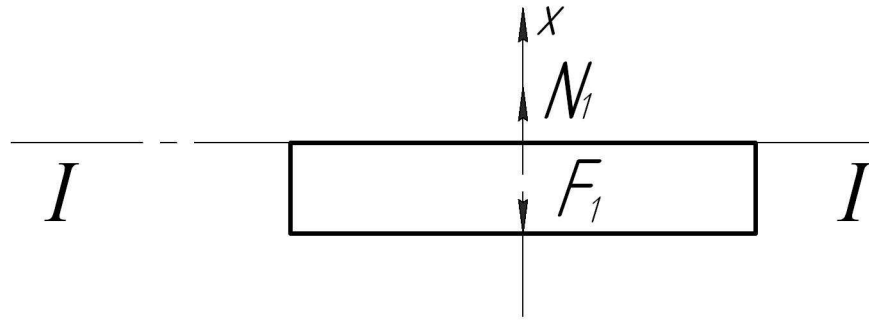


Рис. 1.3

У перерізі II – II (рис.1.4):

$$N_2 - F_1 + F_2 = 0 ; N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 80 = -40 \text{ кН.}$$

У перерізі III – III (рис.1.5):

$$N_3 - F_1 + F_2 - F_4 = 0 ; N_3 = F_1 - F_2 + F_4 = 40 - 80 + 20 = -20 \text{ кН.}$$

У перерізі IV – IV (рис.1.6):

$$N_4 - F_1 + F_2 - F_4 - F_6 = 0; N_4 = F_1 - F_2 + F_4 + F_6 = 40 - 80 + 20 + 80 = 60 \text{ кН.}$$

Закон, за яким змінюється поздовжня сила по довжині стержня, дає епю-
ра поздовжніх сил, вісь абсцис якої паралельна осі стержня, а вісь ординат їй
перпендикулярна. По осі ординат у в обраному масштабі відкладаємо значення
поздовжніх сил (з урахуванням знаків) в поперечних перерізах стержня. При
цьому розтягуючі поздовжні сили вважаємо додатніми, а стискаючі –
від’ємними. Для розглянутого стержня епюра N зображена на рис.1.7.

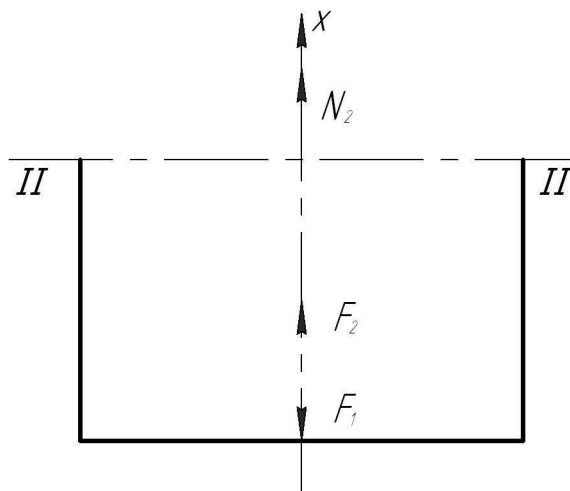


Рис.1.4

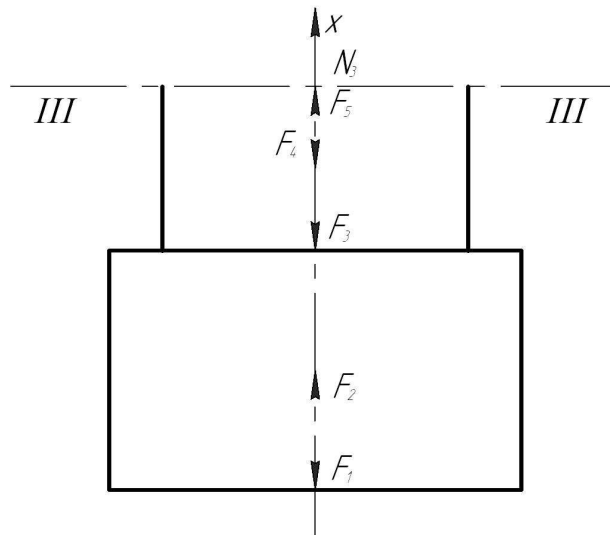


Рис.1.5

Для побудови епюри нормальних напружень в перерізі ступінчастого стержня (рис.1.2) скористаємося формулою

$$\sigma = N / A ,$$

де N – поздовжня сила, яка діє в перерізі відповідної ділянки, Н;

A – площа поперечного перерізу ділянки стержня, м^2 .

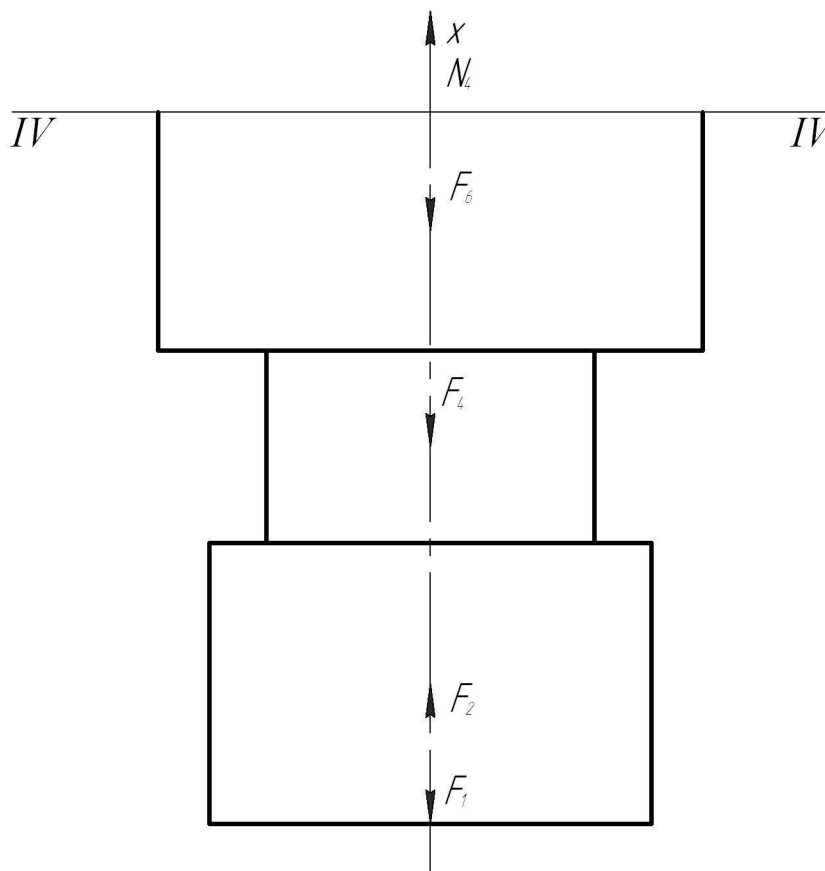


Рис.1.6

Визначимо напруження, діючі в перерізах відповідних ділянок:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = \frac{4 \cdot 40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 56,6 \text{ МПа (розтяг);}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{-40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = -56,6 \text{ МПа (стиск);}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{-40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = -127,4 \text{ МПа (стиск);}$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_{DE}}{A_{DE}} = \frac{-20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = -63,7 \text{ МПа (стиск);}$$

$$\sigma_{EF} = \frac{N_{EF}}{A_{EF}} = \frac{-20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = -15,9 \text{ МПа (стиск);}$$

$$\sigma_{FK} = \frac{N_{FK}}{A_{FK}} = \frac{60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 / 4} = 47,8 \text{ МПа (розтяг).}$$

У вибраному масштабі будуюмо епюру напружень (рис.1.8):

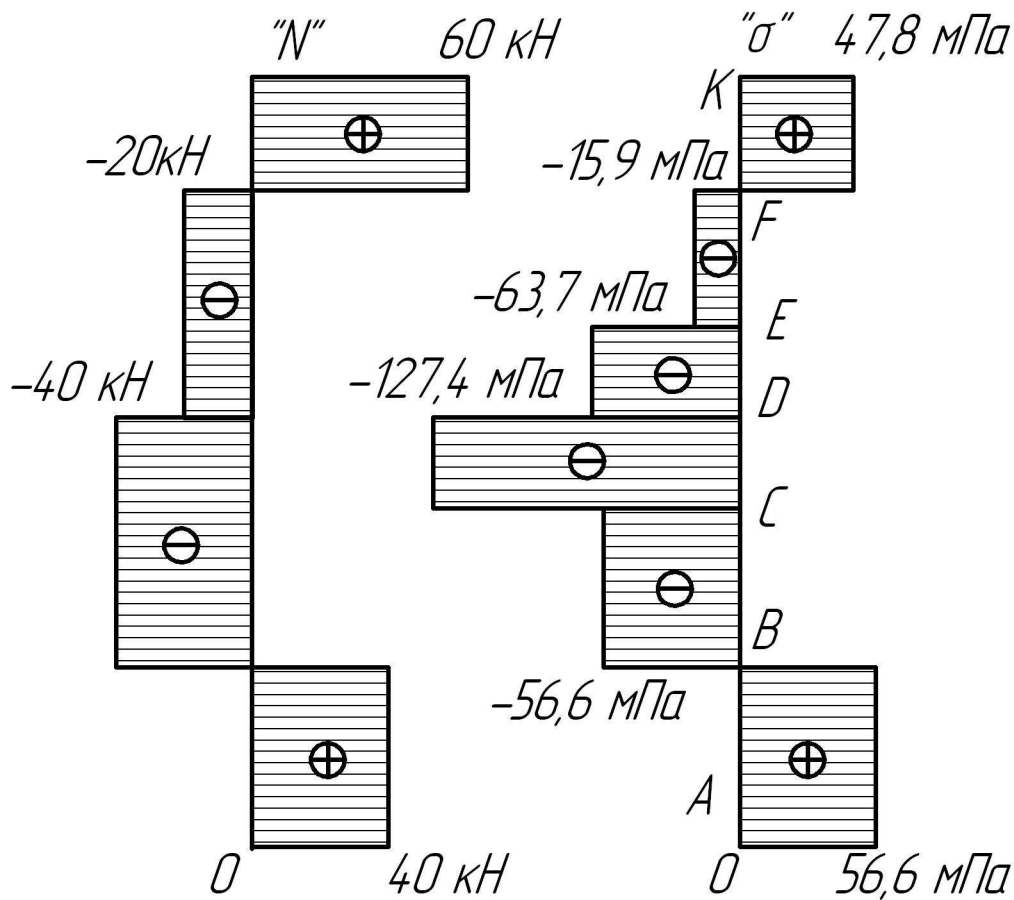


Рис.1.7

Рис.1.8

Для побудови епюри переміщень знаходимо переміщення характерних перерізів КК, FF, EE, DD, CC, BB, AA.(рис. 1.2).

Переміщення перерізу КК дорівнює нулю, тобто $\Delta l_{KK} = 0$.

Переріз FF буде переміщуватись вниз, оскільки ділянка стержня KF розтягується:

$$\Delta l_{FF} = \frac{\sigma_{KF} \cdot l_{KF}}{E} = \frac{47,8 \cdot 800}{2 \cdot 10^5} = 0,19 \text{ мм.}$$

Переріз EE буде переміщуватись доверху, оскільки ділянка стержня FE стискається:

$$\Delta l_{EE} = -\frac{\sigma_{FE} \cdot l_{KF}}{E} = -\frac{15,9 \cdot 800}{2 \cdot 10^5} = -0,063 \text{ мм.}$$

Аналогічно отримаємо переміщення інших перерізів:

$$\Delta l_{DD} = -\frac{\sigma_{ED} \cdot l_{ED}}{E} = -\frac{63,7 \cdot 600}{2 \cdot 10^5} = -0,191 \text{ мм;}$$

$$\Delta l_{CC} = -\frac{\sigma_{DC} \cdot l_{DC}}{E} = -\frac{127,4 \cdot 600}{2 \cdot 10^5} = -0,382 \text{ мм;}$$

$$\Delta l_{BB} = -\frac{\sigma_{CB} \cdot l_{CB}}{E} = -\frac{56,6 \cdot 800}{2 \cdot 10^5} = -0,2264 \text{ мм.}$$

Подовження частини стержня BA

$$\Delta l_{BA} = \frac{\sigma_{BA} \cdot l_{BA}}{E} = \frac{56,6 \cdot 800}{2 \cdot 10^5} = 0,2264 \text{ мм.}$$

Переміщення перерізу AA дорівнює алгебраїчній сумі переміщень перерізів КК, FF, EE, DD, CC, BB і подовженню Δl_{BA} частини стержня:

$$\begin{aligned} \Delta l_{AA} &= \Delta l_{KK} + \Delta l_{FF} + \Delta l_{EE} + \Delta l_{DD} + \Delta l_{CC} + \Delta l_{BB} + \Delta l_{BA} = \\ &= 0 + 0,19 - 0,063 - 0,191 - 0,382 - 0,2264 + 0,2264 = -0,446 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Знак "мінус" у відповіді вказує на те, що переріз AA стержня переміщується вгору на 0,446 мм.

Відкладаючи значення подовжень відповідних ділянок стержня і з'єднуючи отримані точки прямими лініями (оскільки при дії зосереджених зовнішніх сил переміщення лінійно залежать від абсцис перерізів стержня), в ре-

зультаті отримуємо епюру переміщень (рис.1.9), з якої видно, що: 1)перерізи АА, FF переміщуються вниз; 2)перерізи ВВ, СС, DD, ЕЕ переміщуються вгору.

Коефіцієнт запасу $S_{\text{міцності}}$ розраховуємо за формулою

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{127,4} = 1,88 ,$$

де σ_{\max} – найбільше нормальне напруження в стержні. Відповідно до епюри на рис.1.8 воно має місце на ділянці DC і дорівнює $\sigma_{\max} = 127,4$ МПа.

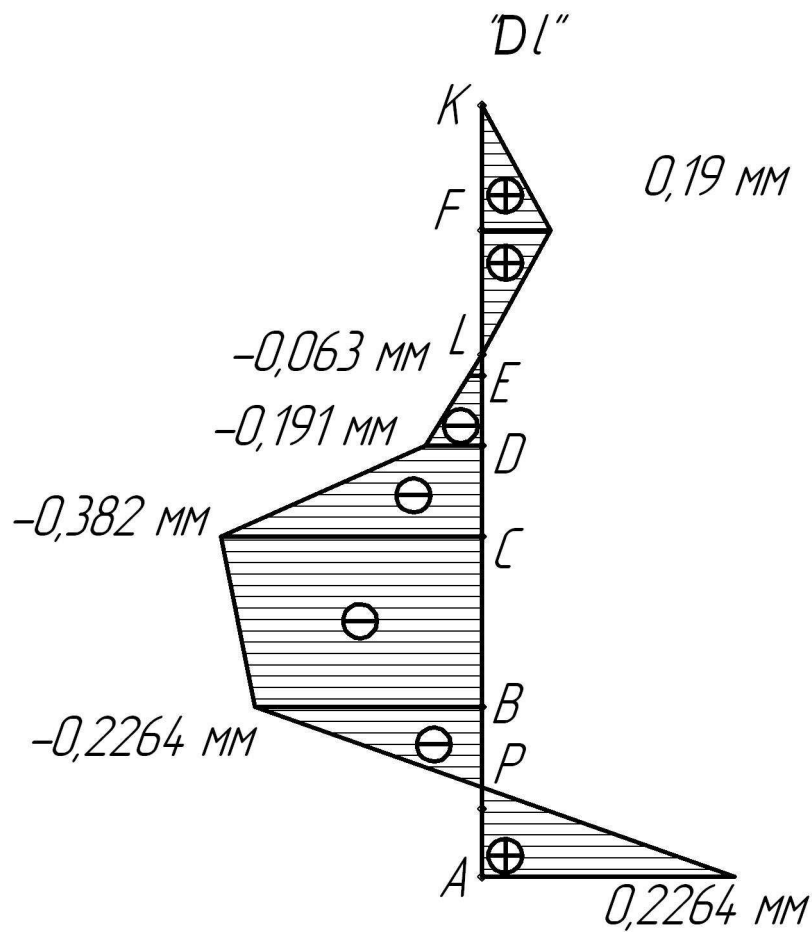


Рис.1.9

Таблиця 1.1

Сила, кН						Довжина, м						Діаметр, мм		
F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	d ₁	d ₂	d ₃
40	10	0	40	0	10	1,0	0,5	1,5	1,0	0,5	1,5	20	20	30
50	20	40	0	40	60	1,5	1,0	0,5	0	1,0	0,5	25	30	35
70	0	30	20	90	0	0,5	1,5	0,5	0,5	1,0	0	30	32	40
50	60	50	0	70	80	0,5	2,0	0	0,5	1,0	0,5	25	20	25
60	20	20	40	0	60	0,5	1,0	0,5	1,5	1,5	0,5	30	40	30
100	50	0	20	80	0	1,0	0,5	1,5	2,0	0	1,0	35	30	20
0	100	40	60	0	40	0	2,0	0,5	1,5	0,5	0,5	35	35	40
30	0	20	40	60	120	1,0	0	0,5	1,5	1,0	0,5	20	30	35
20	60	80	0	10	50	0,5	0,5	0,5	0	1,0	0,5	20	25	30
40	20	50	40	20	0	1,5	0,5	1,0	0,5	1,5	0	25	30	20
80	40	0	10	20	100	0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	0,5	30	25	35
0	60	20	40	0	80	0	1,0	1,2	0,6	0,3	1,5	25	30	35
100	0	20	30	20	60	0,8	0	1,0	1,2	0,8	1,0	32	30	40
90	30	20	0	40	70	1,5	0,5	0	0,5	1,5	1,0	30	28	35
70	80	40	20	90	0	0,6	0,5	1,5	0,5	2,0	0,5	25	25	30

Продовження таблиці 1.1

Варі- ант	Сила, кН						Довжина, м						Діаметр, мм			Варі- ант
	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	l ₁	l ₂	l ₃	l ₄	l ₅	l ₆	d ₁	d ₂	d ₃	
16	0	40	60	40	60	40	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	20	20	30	1
17	40	80	100	40	0	80	1,2	0,8	0,5	0,5	0,8	1,2	20	25	30	2
18	100	80	20	0	20	70	0,8	0,5	0,6	0,6	1,2	0,8	30	20	30	3
19	20	0	40	20	20	50	1,5	0	0,5	1,2	0,5	0,8	20	25	30	4
20	60	20	40	0	20	20	0,5	0,8	1,5	0,7	1,0	1,2	25	25	25	5
21	30	80	40	20	30	0	1,0	0,5	1,5	0,8	0,6	0	24	20	25	6
22	70	30	20	40	0	60	1,2	1,5	0,6	0,6	1,5	1,2	30	25	35	7
23	40	0	20	0	80	40	0,6	0	0,6	1,5	0,5	0,8	30	25	20	8
24	0	60	30	20	50	20	0	1,0	1,0	0,5	1,0	1,5	25	30	35	9
25	40	20	40	20	90	0	1,0	1,5	0,8	0,6	0	1,0	20	25	25	10
26	60	40	0	80	20	40	1,5	0,6	0,5	0,8	1,5	1,0	25	30	36	11
27	50	20	20	100	0	20	1,0	0,8	0,6	0,6	0,5	1,2	25	28	30	12
28	10	0	20	10	60	50	0,8	0	1,0	0,8	0,5	0,8	30	20	20	13
29	0	80	20	10	40	30	0	0,7	1,0	0,5	1,2	0,5	30	25	40	14
30	80	40	0	20	0	80	0,8	1,2	0,6	0,6	0,8	0,8	30	20	40	15

2. КРУЧЕННЯ ПРЯМИХ ВАЛІВ

Крученням називається такий вид деформацій, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки крутний момент. Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладено пару сил. Момент цих пар називають обертаючим (якщо брус обертається) і скручуючим (якщо брус не обертається) (рис.2.1.Т).

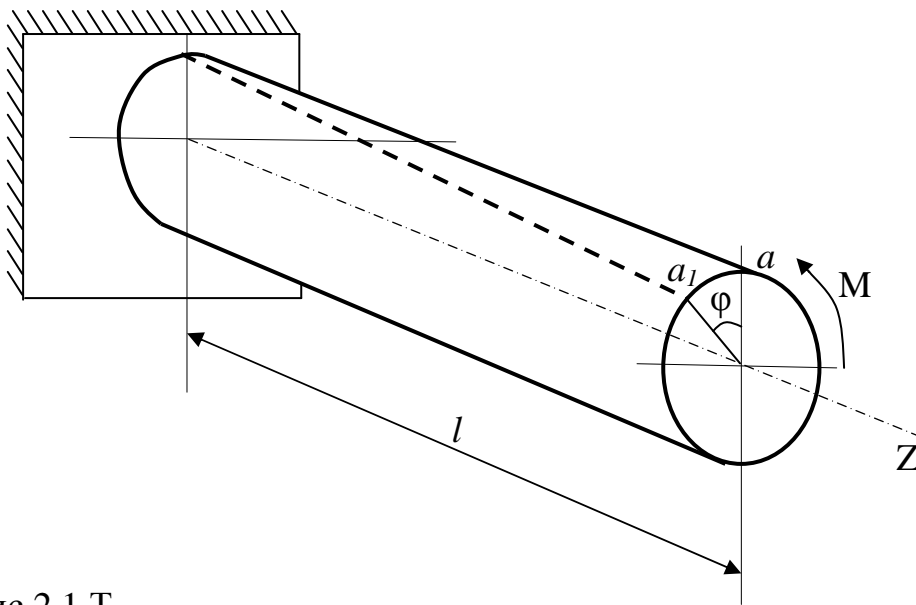
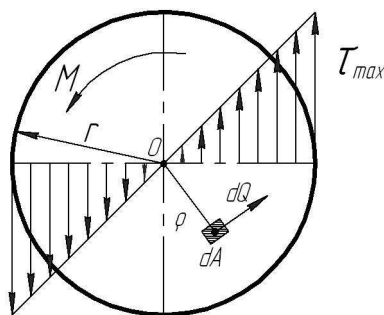


Рис.2.1.Т

При крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент М (рис.2.2.Т).



Коли $\rho = r$, то напруження матимуть максимальні значення

$$\tau_{\max} = \frac{Mr}{I_{\rho}} = \frac{M}{\frac{I_{\rho}}{r}} = \frac{M}{W_{\rho}},$$

де $W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{r}$ - момент опору кручення (або

Рис.2.2.Т

полярний момент опору) перерізу; I_{ρ} – полярний момент інерції.

Повний кут закручування циліндра довжиною l :

$$\varphi = \int \frac{M dl}{GI_{\rho}},$$

де G модуль зсуву.

Для круглого перерізу момент опору крученню

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{32 \cdot 0.5d} = 0.2d^3$$

Розрахункова формула на міцність для кручення має вигляд

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустимі напруження кручення.

2.1 Приклад виконання завдання

Приклад. Для заданої схеми за одним із варіантів побудувати епюру крутних моментів (при побудові епюри прийняти $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$); обчислити діаметр вала на кожній ділянці (отримані розрахункові значення діаметрів вала округлити до найближчого більшого, яке закінчується на 0, 2, 5, 8); накреслити ескіз вала; побудувати епюру кутів повороту перерізів вала. Чисельні значення даних наведені в табл. 2.1, схеми варіантів на рис. 2.7-2.11.

Розглянемо випадок кручення вала (рис.2.1), який складається із декількох пружних невагомих ділянок, розділених маховими масами, до яких прикладені зовнішні крутні моменти M_1, M_2, M_3, M_0 (варіант 30).

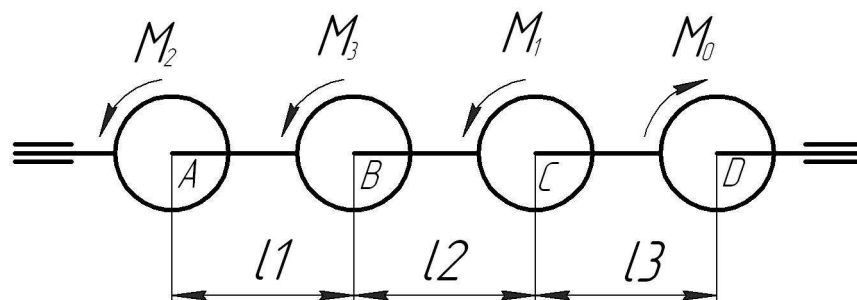


Рис. 2.1

Для розрахунку крутних моментів T , які виникають в перерізах вала під дією зовнішніх крутних моментів, застосовуємо метод перерізу.

Проведемо переріз I-I вала (рис.2.2, а), відкинувши праву відрізану частину вала, і розглянемо рівновагу лівої частини, що залишилася (рис.2.3). Дію правої відкинутої частини на ліву, що залишилась, замінимо крутним моментом T_1 .

При цьому будемо дотримуватися наступного правила: крутний момент T в перерізі вала вважається додатним, коли, якщо дивитись на нього зі сторони перерізу, він закручує відсічену частину вала проти годинникової стрілки. У протилежному випадку крутний момент T є від'ємним. Це ж правило стосується і зовнішніх моментів M_1, M_2, M_3, M_0 .

Відповідно до прийнятого правила знаків для моментів крутний момент T_1 у рівнянні рівноваги буде зі знаком “мінус”.

Запишемо рівняння рівноваги розглянутої частини вала (рис.2.3): сума моментів всіх сил відносно осі вала OO_1 повинна дорівнювати нулю

$$\sum M_{OO_1}(F_k) = 0.$$

Тоді отримуємо

$$M_2 - T_1 = 0,$$

звідки

$$T_1 = M_2 = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ кН} \cdot \text{м},$$

Аналогічно розрахуємо крутний момент в перерізі II-II (рис.2.4)

$$M_2 + M_3 - T_2 = 0,$$

звідки

$$T_2 = M_2 + M_3 = 280 + 300 = 0,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для знаходження крутного момента в перерізі III-III розглянемо рівновагу правої відрізаної частини (рис.2.5).

Із умови рівноваги розглянутої частини вала отримуємо

$$-T_3 + M_0 = 0;$$

звідки

$$T_3 = M_0 = 900 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

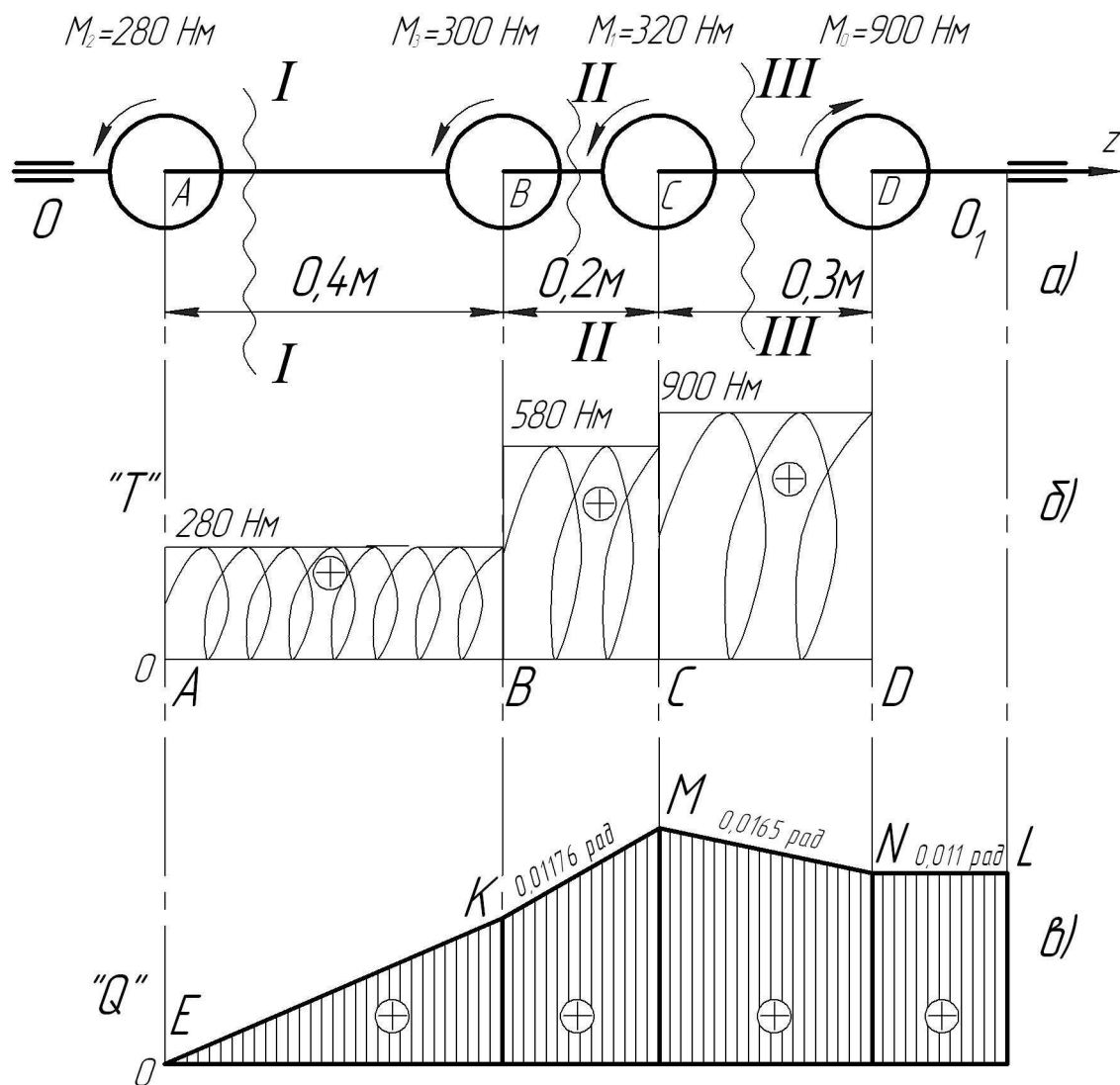


Рис.2.2

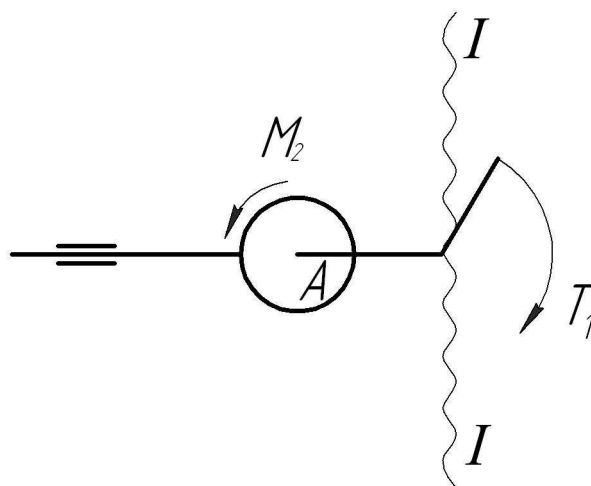


Рис.2.3

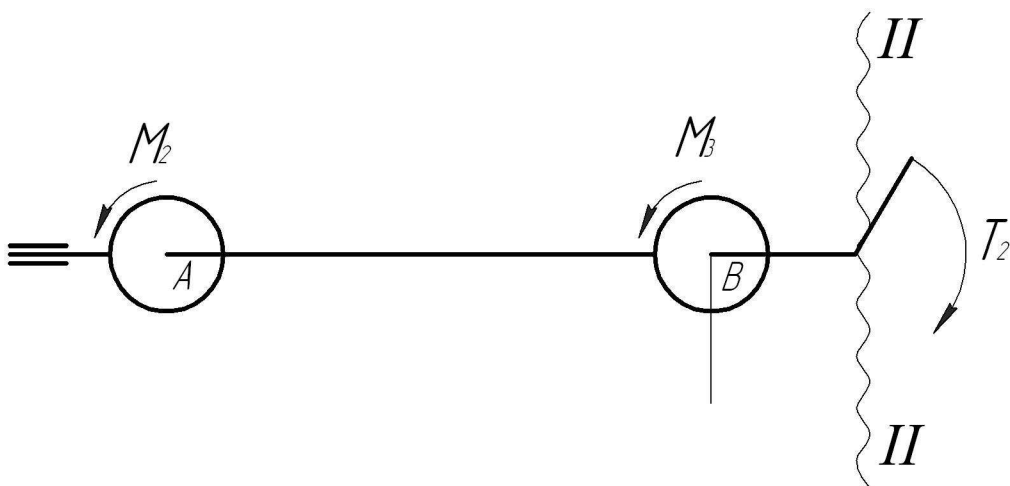


Рис.2.4

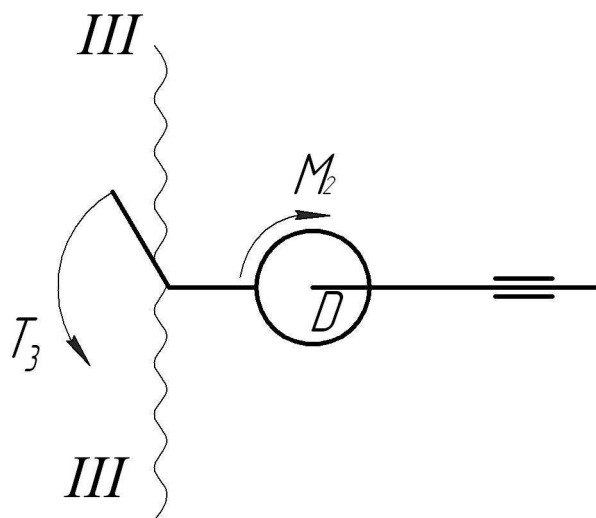


Рис.2.5

Наочне уявлення про закон зміни крутного моменту уздовж вала дає епюра крутних моментів, вісь абсцис якої паралельна осі вала. По осі ординат у вибраному масштабі відкладаємо значення крутних моментів (з урахуванням знаків). Для розглянутого випадку епюра крутних моментів показана на рис.2.2,б.

Розрахуємо діаметри вала на кожному участку із умови міцності при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau],$$

де τ_{\max} – найбільші дотичні напруження при крученні на відповідній ділянці вала;

T – крутний момент на відповідному участку;

W_p – момент опору перерізу при крученні;

$[\tau]$ – припустиме дотичне напруження.

Формула для визначення діаметра вала має вигляд:

$$d = \sqrt[3]{T / (0,2[\tau])} = 1,72 \sqrt[3]{T / [\tau]}.$$

Діаметр першої ділянки вала дорівнюватиме

$$d_1 = 1,72 \sqrt[3]{T_1 / [\tau]} = 1,72 \sqrt[3]{0,28 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,033 \text{ м} = 3,3 \text{ см} = 33 \text{ мм}.$$

Аналогічно розраховуємо діаметри другої і третьої ділянок вала:

$$d_2 = 1,72 \sqrt[3]{T_2 / [\tau]} = 1,72 \sqrt[3]{0,58 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,042 \text{ м} = 4,2 \text{ см} = 42 \text{ мм};$$

$$d_3 = 1,72 \sqrt[3]{T_3 / [\tau]} = 1,72 \sqrt[3]{0,9 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,049 \text{ м} = 4,9 \text{ см} = 49 \text{ мм}.$$

Після округлення результатів отримуємо наступні дійсні діаметри валів, мм:

$$d_1 = 35 \text{ мм}; d_2 = 42 \text{ мм}; d_3 = 50 \text{ мм}.$$

Ескіз розрахованого вала наведено на рис.2.6.

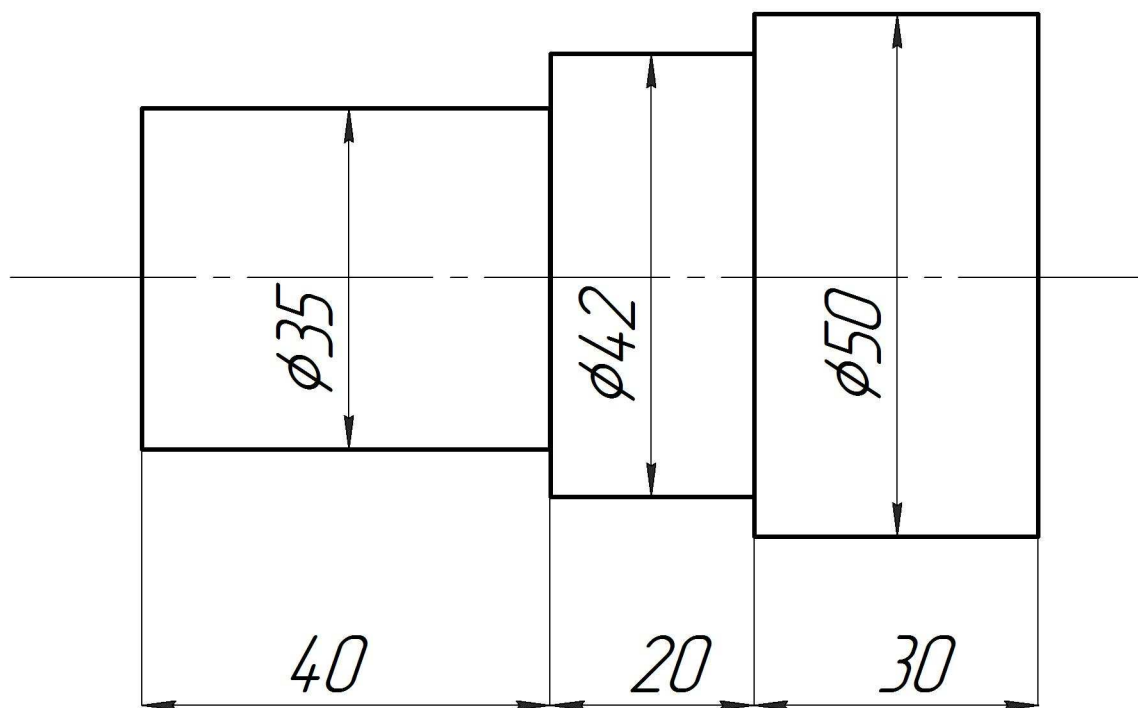


Рис. 2.6

Для побудови епюри кутових переміщень приймаємо переріз в точці А за умовно нерухомий. Кут повороту Θ_{BA} перерізу В по відношенню до перерізу А розрахуємо за формулою

$$\Theta_{BA} = T_{AB} L_{AB} / (G I_{pAB}),$$

де T_{AB} – крутний момент на участку АВ;

L_{AB} – довжина участка АВ;

$G = 8 \cdot 10^4$ МПа – модуль пружності другого роду при крученні;

$I_{pAB} \approx 0,1 d_{AB}^4$ – полярний момент інерції перерізу вала відносно його осі на ділянці АВ, ($d_{AB} = d_1$).

Прийmemo наступне правило знаків для кутів поворота перерізів: кути Θ буде-мо вважати додатніми тоді, коли переріз повертається (якщо дивитись уз-довж осі Z справа наліво) проти годинникової стрілки. У даному випадку Θ_{BA} буде додатним.

$$\Theta_{BA} = \frac{280 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (33 \cdot 10^{-3})^4} = 0,01176 \text{ рад.}$$

У прийнятому масштабі відкладемо ординату Θ_{BA} (рис.2.2,в).Отриману точку К з'єднаємо з точкою Е, оскільки на ділянці АВ кути змінюються за законом прямої лінії $\Theta = TZ / (GI_p)$, куди абсциса перерізу Z входить в першому ступені.

Розрахуємо тепер кут повороту перерізу С по відношенню до перерізу В. Враховуючи прийняте правило знаків для кутів закручення, отримуємо додат-ний кут закручення

$$\Theta_{CB} = T_{BC} L_{BC} / (GI_{pBC}) = \frac{580 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (42 \cdot 10^{-3})^4} = 0,0047 \text{ рад.}$$

Оскільки переріз В рухомий, то кут повороту перерізу С по відношенню до перерізу А дорівнює

$$\Theta_{CA} = \Theta_{CB} + \Theta_{BA} = 0,0047 + 0,01176 = 0,0165 \text{ рад.}$$

Тоді, відклавши його в прийнятому масштабі вверх від осі епюри, отримає-мо точку М. З'єднавши точку М з точкою К, отримаємо епюру кутів закручу-вання на ділянці ВС.

Розрахуємо кут повороту перерізу D по відношенню до перерізу С. Згідно з правилом знаків для кутів закручування кут Θ_{DC} буде від'ємним.

$$\Theta_{DC} = -T_{DC} L_{DC} / (GI_{\rho DC}) = -\frac{900 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (49 \cdot 10^{-3})^4} = -0,00586 \text{ рад.}$$

Оскільки перерізи В і С рухомі, то кут повороту перерізу D по відношенню до перерізу А дорівнює

$$\Theta_{DA} = \Theta_{DC} + \Theta_{CB} + \Theta_{BA} = \Theta_{DC} + \Theta_{CA} = -0,00586 + 0,0165 = 0,011 \text{ рад.}$$

Відклавши його в прийнятому масштабі вгору від осі епюри, отримаємо точку N. З'єднавши точки М і N, отримаємо епюру кутів закручування на ділянці DC. На ділянці DO₁ скручування не буде, оскільки крутні моменти на цій ділянці дорівнюють нулю, тому всі перерізи повертаються на стільки ж, на скільки повертається переріз D. Ділянка NL епюри Θ тут горизонтальна.

Таблиця 2.1

Варіант	Розміри, м			Крутні моменти, Н·м			Прип. напр.[τ] при крученні
	l_1	l_2	l_3	M_1	M_2	M_3	
1	0,4	0,1	0,7	300	400	220	25
2	0,5	0,2	0,6	350	280	450	28
3	0,6	0,3	0,5	320	380	250	30
4	0,1	0,4	0,4	250	220	380	32
5	0,2	0,5	0,3	350	350	280	35
6	0,3	0,6	0,8	400	380	250	40
7	0,4	0,6	0,7	380	320	300	25
8	0,5	0,5	0,6	200	350	380	28
9	0,6	0,4	0,5	400	300	320	30
10	0,1	0,3	0,4	350	350	250	32
11	0,2	0,2	0,7	420	380	350	35
12	0,3	0,1	0,6	300	200	400	40
13	0,4	0,2	0,5	450	200	380	25
14	0,5	0,3	0,4	280	450	300	28
15	0,6	0,4	0,3	300	400	220	30
16	0,2	0,5	0,7	320	350	350	32
17	0,3	0,6	0,5	320	380	250	35
18	0,4	0,7	0,4	280	220	350	40
19	0,5	0,2	0,3	350	320	280	25
20	0,6	0,3	0,7	400	380	250	28
21	0,1	0,4	0,6	380	350	300	30
22	0,2	0,5	0,5	220	250	280	32
23	0,3	0,6	0,4	400	380	220	35
24	0,4	0,7	0,6	350	380	200	40
25	0,5	0,7	0,5	420	400	250	25
26	0,6	0,6	0,4	200	380	350	38
27	0,1	0,5	0,6	300	220	280	30
28	0,2	0,4	0,5	220	250	380	32
29	0,3	0,3	0,4	320	280	300	35
30	0,4	0,2	0,3	200	380	350	40

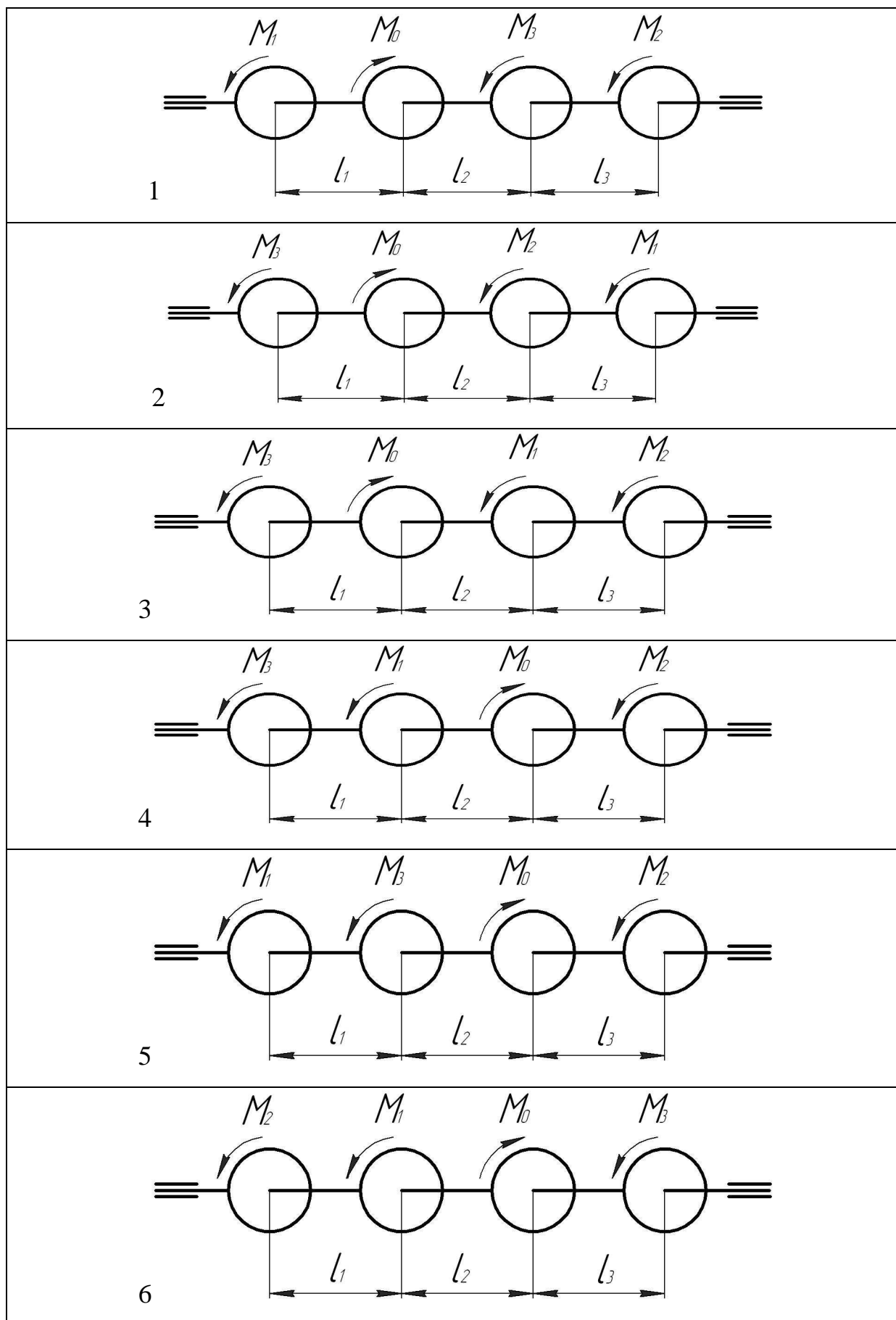


Рис. 2.7

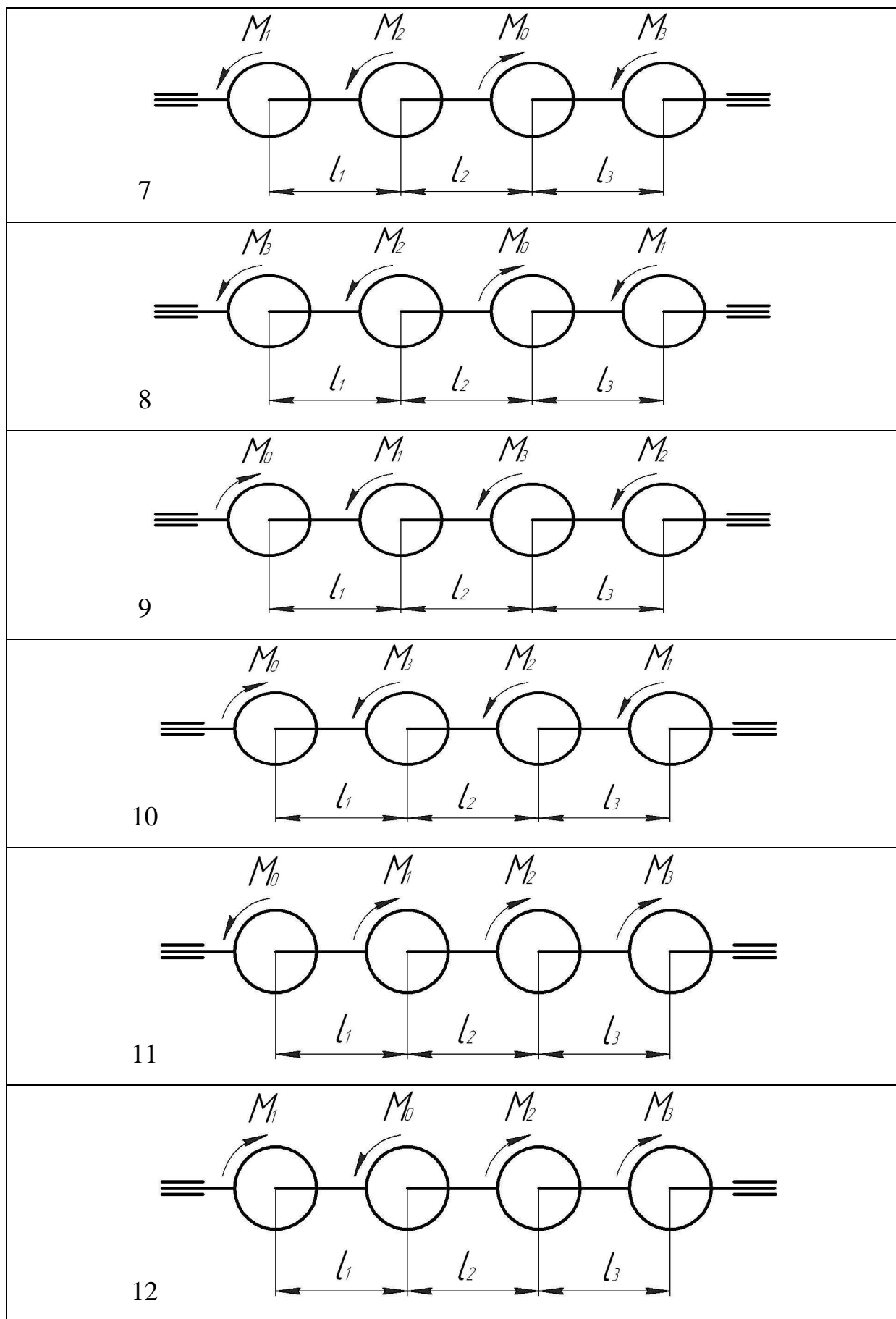


Рис. 2.8

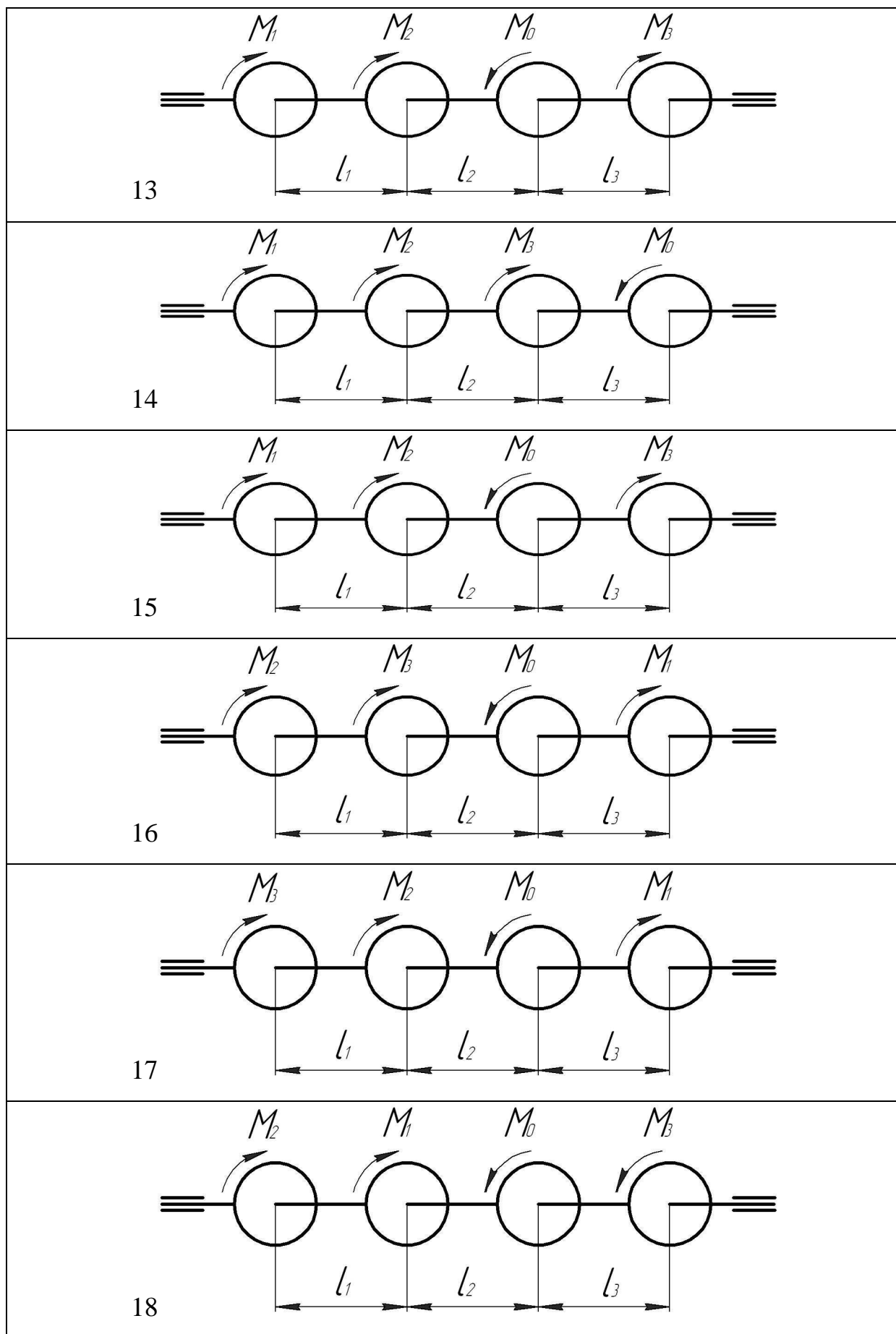


Рис. 2.9

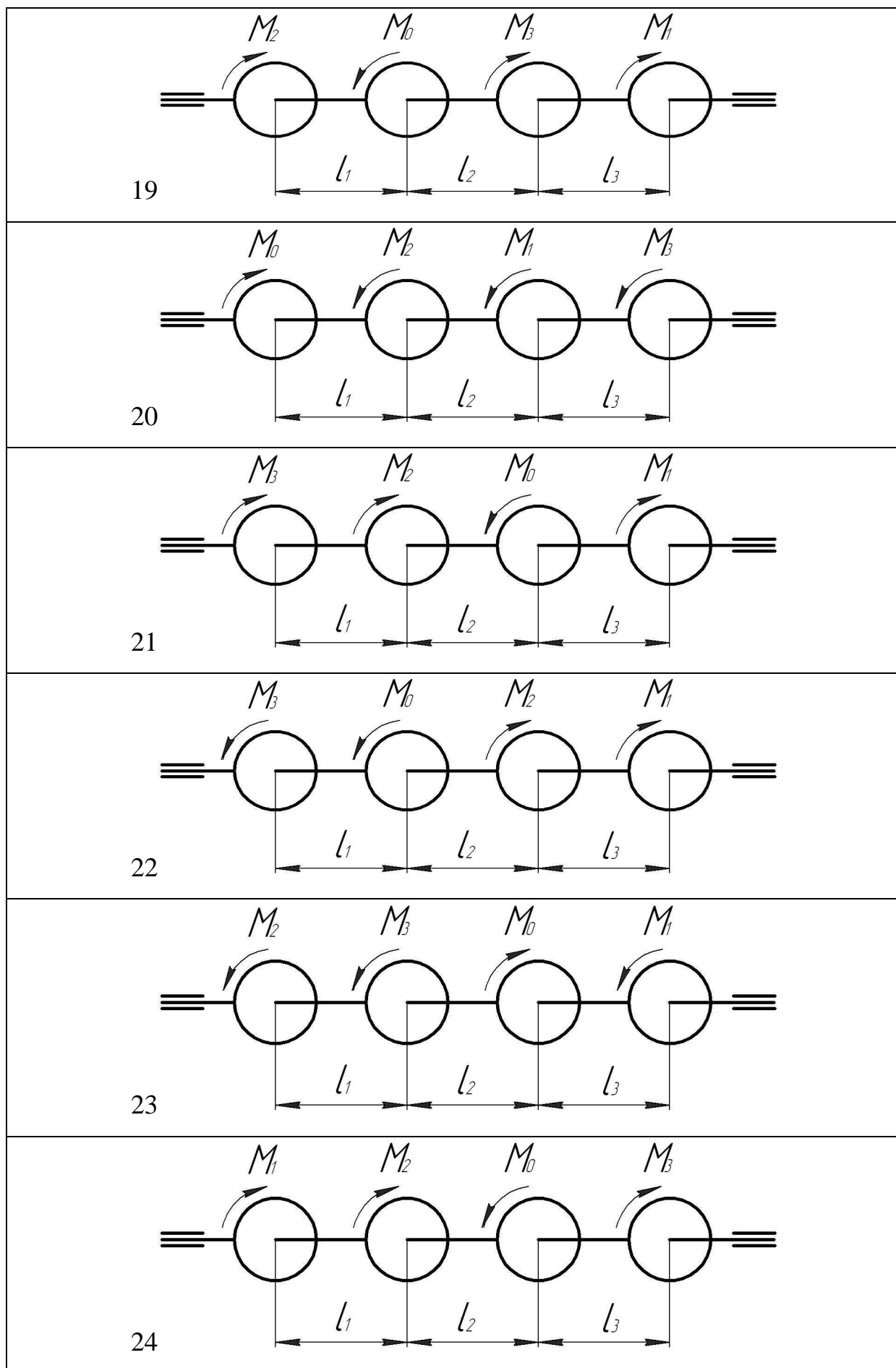


Рис. 2.10

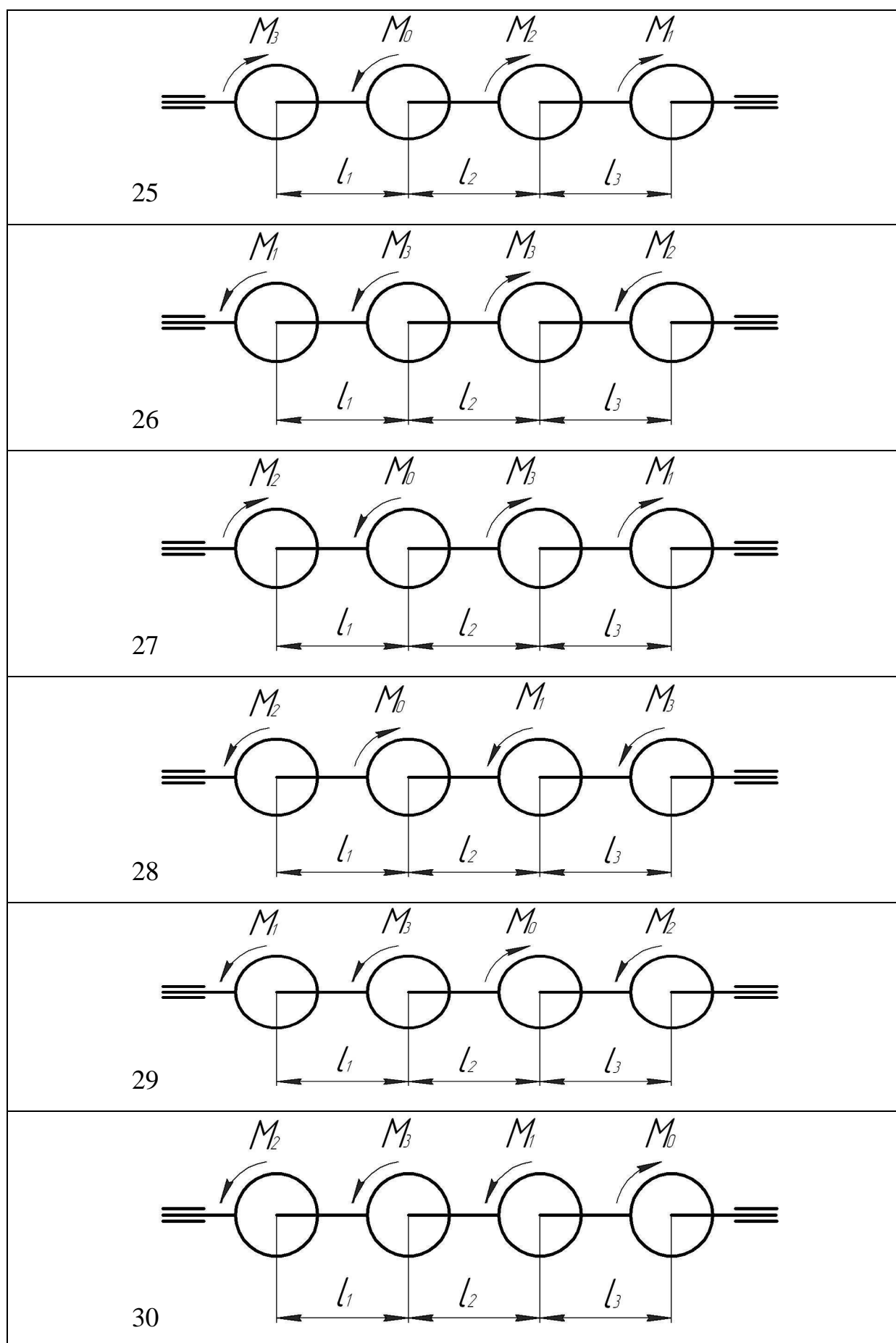


Рис.2.11

3 . ЗГИН БАЛОК ЗІ СТАЛОЮ ПО ВСІЙ ДОВЖИНІ ПЛОЩЕЮ ПЕРЕРІЗУ

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинаючий момент. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил (рис.3.1.Т).

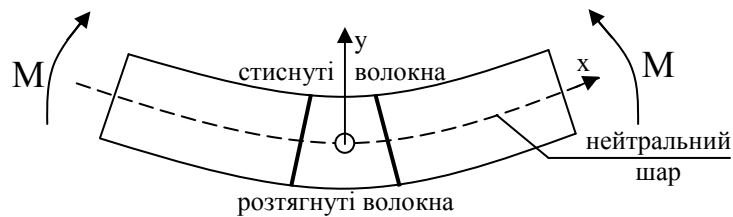


Рис.3.1.Т

Волокна, які лежать на опуклому боці, розтягуються, а ті, що лежать на вгнутому боці – стискаються. На межі між ними лежить нейтральний шар волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини. При чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу.

Лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу називають нейтральною віссю. На нейтральній осі нормальні напруження дорівнюють нулю.

Для визначення внутрішніх силових факторів застосуємо метод перерізів. Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинаючий момент і поперечна сила, називають поперечним.

Якщо зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз, то згинаючий момент у перерізі вважають додатним, і навпаки (рис.3.2.Т).

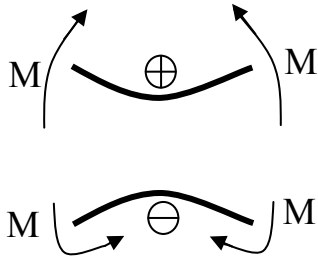


Рис.3.2.Т

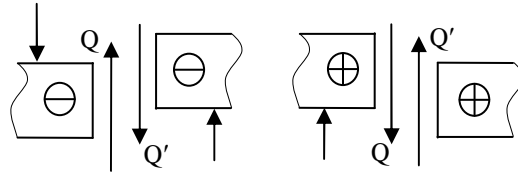


Рис.3.3.Т

Якщо сума зовнішніх сил, які діють зліва від перерізу, дає рівнодіючу, напрямлену вгору, то поперечну силу Q в перерізі вважають додатньою, і навпаки: для частини балки, розміщеної справа від перерізу, знаки поперечної сили будуть протилежними (рис.3.3.Т).

Підкреслимо, що для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статки, для визначення знаків згинаючого моменту і поперечної сили – правилами знаків опору матеріалів.

Якщо рівняння згинаючих моментів продиференціювати по абсцисі X перерізу, то отримаємо:

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Якщо рівняння згинаючих моментів (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, то матимемо

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q,$$

тобто друга похідна від згинаючого моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження. Це дає змогу за законом другої похідної судити про опуклість або вгнутість епюр згинаючого моменту.

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинаючих моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили і згинаючого моменту в цьому перерізі.

В поперечних перерізах балки у випадку чистого згину виникають тільки нормальні напруження розтягу і стиску. Застосувавши закон Гука для розтягу і стиску, матимемо

$$\sigma_y = \frac{E y}{\rho},$$

де E – модуль пружності першого роду;

y – координата точки на перерізі;

ρ – радіус кривизни нейтрального шару.

З цієї формули видно, що нормальні напруження деформації згину розподілені по висоті перерізу нерівномірно: максимальні напруження виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі. По ширині перерізу нормальні напруження не змінюються. Закон розподілу нормальних напружень для круглого поперечного перерізу зображено на рис.3.4.Т.

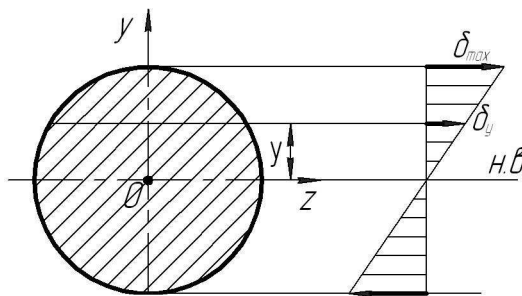


Рис.3.4.Т

Однак ця формула для обчислення нормальних напружень незручна, бо до неї входить радіус кривизни. На практиці застосовується наступна формула:

$$M = \frac{EI}{\rho},$$

де I – момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі;

EI – жорсткість перерізу при згині.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу $M = \text{const}$ і

$I = \text{const}$, то $\rho = \frac{EI}{M} = \text{const}$.

Отже, зігнута вісь такої балки є дугою кола. Значення радіуса кривизни підставимо в формулу для обчислення нормальних напруг. Тоді максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі

$$\sigma_y = E y = \frac{E y}{\frac{EI}{M}} = \frac{M y}{I},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I} = \frac{M}{W_z},$$

де $W_z = \frac{I}{y_{\max}}$ - момент опору.

Момент опору кола діаметром d :

$$W_z = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3$$

Момент опору прямокутника шириною b і висотою h :

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Тобто, нормальні напруження в небезпечному перерізі не повинні перевищувати допустимі. Допустимі нормальні напруження для випадку згину беруть такими ж, як для розтягу і стиску.

3.1 Приклад виконання завдання

Приклад. Для трьох заданих схем навантаження балок (рис.3.7) за одним із варіантів (чисельні значення даних наведені в табл. 3.1), побудувати епюри поперечних сил і згинних моментів (на кожній схемі балки показати напрям реакції і вказати їх величини; побудувати епюри поперечних сил і вказати на епюрі їх характерні значення; побудувати епюри згинних моментів і вказати на кресленні їх характерні значення); із умови міцності по нормальним напруженням при $[\sigma] = 140$ МПа провести підбір прямокутного та круглого перерізів балки, зпівставити величини площин різних перерізів (для прямокутного перерізу $h/b = \beta = 2,3$).

Розглянемо напружено-деформований стан балки №1 (варіант 32, рис.3.3, табл.3.1). Для побудови епюр поперечних сил Q і згинних моментів T балки №1 (рис.3.3) розрахуємо опорні реакції. Введемо систему координат XAY , вісь абс-

цис AX якої співпадає з віссю стержня, а вісь ординат AY їй перпендикулярна. Реакцію жорсткого закріплення подаємо у вигляді двох проєкцій R_{AX} і R_{AY} , а також реактивного моменту M_A .

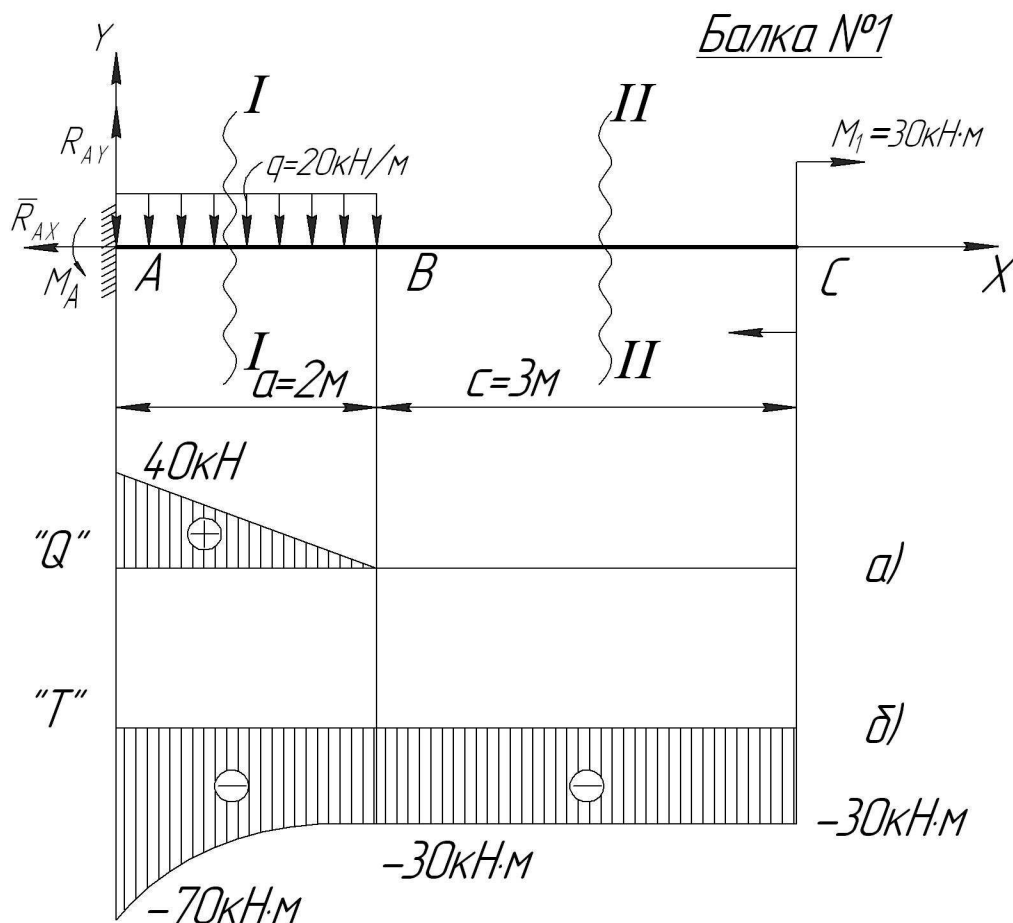


Рис.3.3

Складемо рівняння рівноваги балки. Прирівняємо до нуля суму проєкцій усіх сил на вісь X , які діють на балку, $\sum F_{kx} = 0$. Отримуємо $R_{AX} = 0$.

Те ж саме на вісь Y : $\sum F_{ky} = 0$.

$$R_{AY} - q_2 a = 0,$$

звідки

$$R_{AY} = q_2 a = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН.}$$

Прирівняємо до нуля суму моментів усіх сил відносно будь-якої точки, наприклад, відносно точки A :

$$\sum M_A(F_k) = 0; \quad M_A - q_2 a \frac{a}{2} - M_1 = 0,$$

звідки

$$M_A = \frac{q_2 a^2}{2} + M_1 = \frac{20 \cdot 2^2}{2} + 30 = 70 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак “плюс” вказує на те, що прийнятий на початку напрямок реактивного моменту вибраний правильно. При $M_A < 0$ напрямок реактивного моменту (рис.3.3) потрібно змінити на зворотній. Для перевірки правильності рішення можна використати, наприклад, рівняння $\sum M_B(F_K) = 0$.

Для знаходження внутрішніх зусиль в поперечних перерізах балки – згинного моменту T і перерізуючої сили Q – застосуємо метод перерізу. На ділянці АВ балки АС на відстані X від точки А (початок координат) зробимо переріз І-І. Відкинемо одну із частин балки, наприклад, праву, і розглянемо рівновагу лівої частини. Взаємодію частин балки замінимо внутрішніми зусиллями: згинним моментом T_1 і перерізуючою силою Q_1 (рис.3.4).

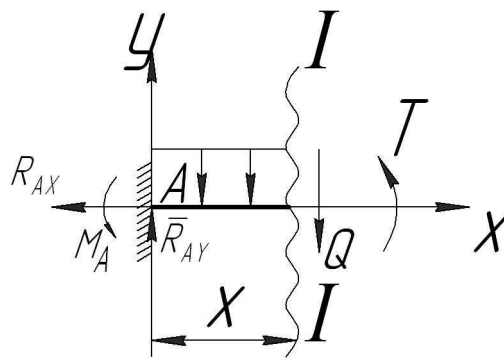


Рис. 3.4

Для отримання закону зміни сили Q_1 на ділянці АВ використовуємо рівняння рівноваги

$$\sum F_{KY} = 0; \quad R_{AY} - q_2 x - Q_1 = 0,$$

звідки $Q_1 = R_{AY} - q_2 x$ – рівняння прямої лінії. Значення координати X на ділянці АВ змінюється в межах $0 \leq X < 2$. Розрахуємо значення сили Q_1 в крайніх точках ділянки АВ.

$$Q_{1/X=0} = R_{AY} = 40 \text{ кН}; \quad Q_{1/X=2} = R_{AY} - q \cdot 2 = 40 - 20 \cdot 2 = 0 \text{ кН}.$$

На епюрі Q (рис.3.3,а) відкладаємо в масштабі отримані значення Q_1 і з'єднуємо прямою лінією.

Розрахуємо тепер перерізуючу силу в розрізі II-II ділянки ВС. Для цього відкинемо, наприклад, ліву частину стержня і розглянемо рівновагу правої (рис.3.5).

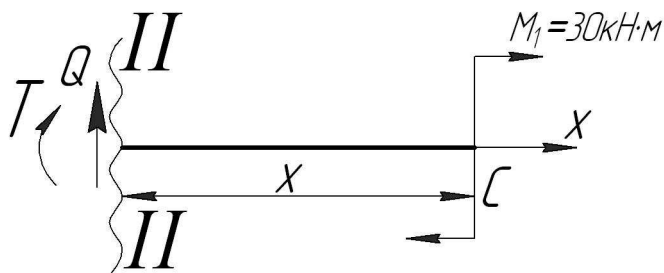


Рис. 3.5

Дію відкинутої лівої на праву, що залишилася, частину балки замінимо згинним моментом T_2 і перерізуючою силою Q_2 (у відповідності з прийнятим правилом знаків для внутрішніх сил). Запишемо умову рівноваги для вибраної частини балки (рис.3.5)

$$\sum F_{KY} = 0; \quad Q_2 = 0.$$

Отже, на протязі всієї ділянки ВС ($0 \leq x < 3$) балки АС перерізуюча сила дорівнює нулю. Відкладаємо отриманий результат на кресленні і отримуємо епюру перерізуючої сили Q балки АС (рис.3.3,а).

Побудуємо епюру згинних моментів T в перерізах балки АС. Згинний момент в перерізі I-I знайдемо, якщо складемо суму моментів всіх сил, які діють на частину балки, що залишилася, відносно перерізу I-I

$$\sum M_{I-I}(F_K) = 0; \quad M_A - R_{AY} \cdot x + q_2 x \frac{x}{2} + T_1 = 0,$$

звідки $T_1 = -M_A + R_{AY} \cdot x - q_2 \frac{x^2}{2}$ – це рівняння параболи. Знак “плюс” для реактивного згинного моменту M_A вибраний тому, що момент направлений в сторону, протилежну обертанню годинникової стрілки. Змінна x лежить в межах:

$0 \leq X < 2$. Для побудови епюри згинного моменту на ділянці АВ балки розрахуємо два значення T_1 :

$$T_{1/X=0} = -M_A = -70 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_{1/X=2} = -M_A + R_{AY} a - q_2 \frac{a^2}{2} = -70 + 40 \cdot 2 - 20 \frac{2^2}{2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Дослідимо на екстремум формулу для згинного моменту T_1 :

$$\frac{dT_1}{dx} = R_{AY} - q_2 x = 0,$$

звідки

$$X = R_{AY} / q_2 = 40 / 20 = 2 \text{ м}, \quad T_{1\max} = T_{1/X=2} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відкладаємо на епюрі моменти T_1 у вибраному масштабі і, з'єднавши знайдені характерні точки, отримуємо епюру згинних моментів на ділянці АВ (рис.3.3,б). Згинний момент в перерізі II-II отримуємо з рівняння

$$\sum M_{II-II}(F_K) = 0; \quad -T_2 - M_1 = 0,$$

звідки

$$T_2 = -M_1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Відкладаємо отриманий результат в заданому масштабі на епюрі. Епюра T зображена на рис.3.3,б.

Для підбору перерізу балки із рівняння міцності отримуємо залежність

$$W_Z \geq T_{\max} / [\sigma].$$

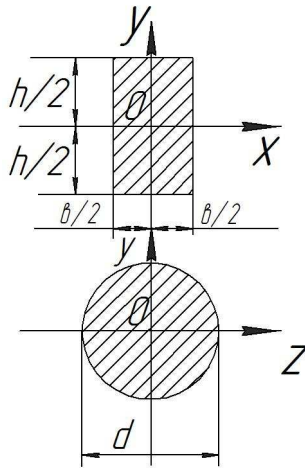


Рис.3.6

Підберемо прямокутний і круглий поперечний перерізи для балки №1. З рис.3.3,б видно, що $T_{\max} = 70 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Тоді для прямокутного і круглого поперечного перерізів момент опору при згині

$$W_Z = T_{\max} / [\sigma] = 70 / 140 \cdot 10^3 = 0,0005 \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3.$$

Для прямокутного поперечного перерізу при $h / b = 2,3$ момент опору в цьому випадку має вигляд

$$W_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h \cdot h^2}{2,3 \cdot 6} = \frac{h^3}{13,8} \text{ см}^3.$$

звідки

$$h = \sqrt[3]{6900} \approx 19 \text{ см}, \text{ а } b = 8,3 \text{ см}.$$

Площа прямокутного поперечного перерізу

$$A = 8,3 \cdot 19 = 157,7 \text{ см}^2.$$

Для круглого поперечного перерізу складемо рівняння $0,1d^3 = 500$, звідки $d = \sqrt[3]{5000} \approx 17 \text{ см}$. Площина перерізу

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 17^2}{4} = 227 \text{ см}^2.$$

Видно, що при рівній міцності площа прямокутного поперечного перерізу менша площини круглого.

Таблиця 3.1

Варі- ант	Довжина, м			Зовнішні силові фактори					
	a	c	l	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	M_1 , Н·м	M_2 , Н·м
1	1	1	6	20	25	10	8	30	20
2	2	1	6	25	30	12	14	40	20
3	3	1	6	30	35	14	16	50	20
4	1	2	7	25	35	16	10	30	30
5	2	2	8	35	40	18	10	40	40
6	3	2	7	30	40	20	10	50	20
7	1	3	7	35	45	10	12	30	40
8	2	3	8	40	40	12	16	40	50
9	3	3	10	50	40	14	18	50	30
10	1	2	8	45	35	16	18	30	50
11	2	3	9	45	40	18	20	40	20
12	3	1	8	50	40	20	14	50	40
13	1	2	9	40	45	10	14	30	20
14	2	3	10	45	50	12	18	40	30
15	3	1	9	35	50	14	20	50	30
16	1	2	8	30	45	16	20	30	40
17	2	3	9	50	45	18	14	40	40
18	3	1	10	40	50	20	16	50	40
19	1	1	7	20	15	5	15	20	10
20	2	1	7	25	20	10	5	30	10
21	3	1	8	30	25	15	5	40	10
22	1	2	9	35	30	20	5	50	20
23	2	2	10	40	35	5	10	20	30
24	3	2	9	45	40	10	15	20	30
25	1	3	8	50	45	15	10	40	20
26	2	3	7	20	50	20	10	50	20
27	3	1	6	25	45	5	15	20	30
28	1	2	7	30	40	10	15	30	40
29	2	3	8	35	15	15	10	40	30
30	3	2	9	40	20	20	15	50	30
31	1	2	6	45	20	5	20	20	40
32	2	3	7	50	25	10	20	30	40

Варіанти схем балок

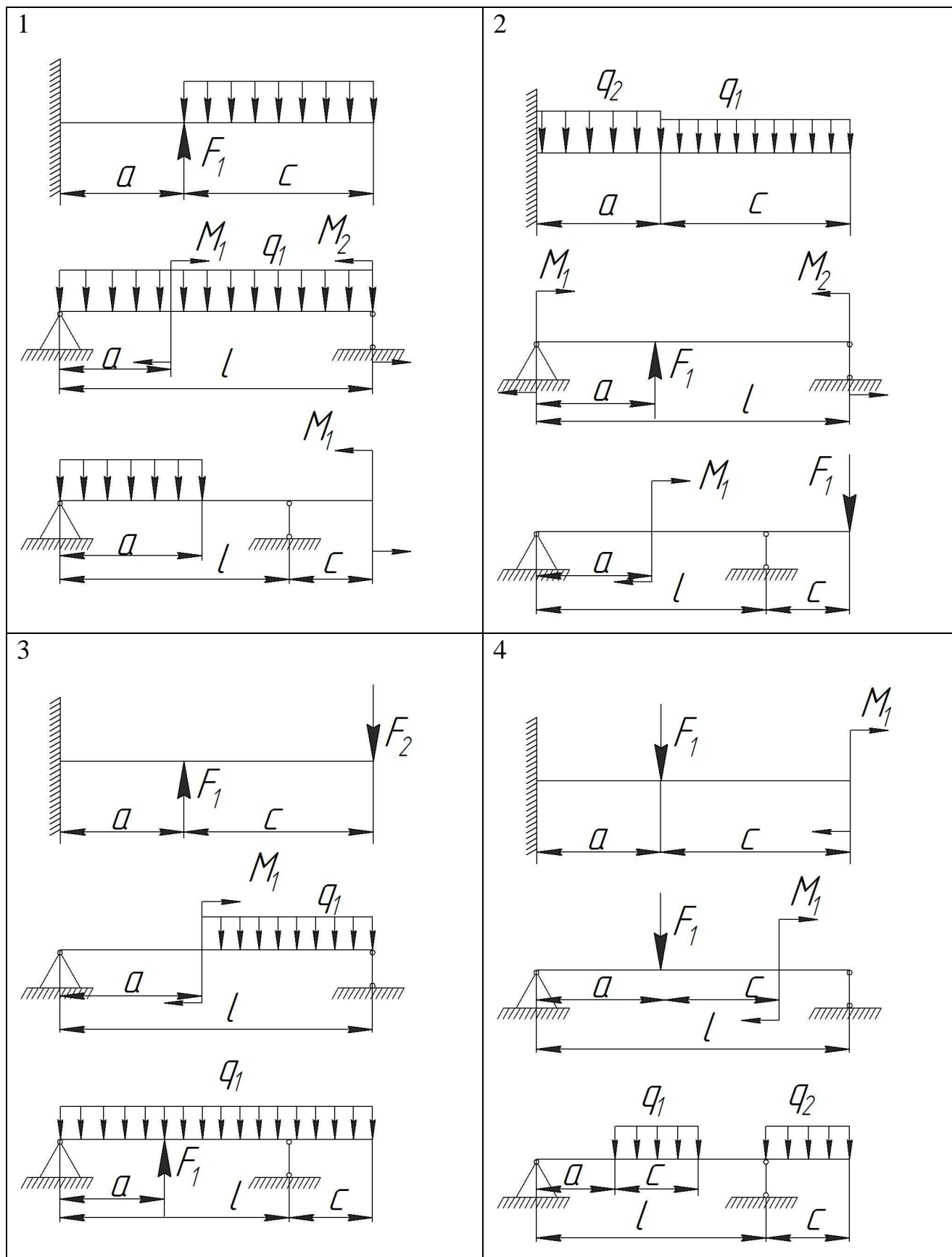


Рис. 3.7

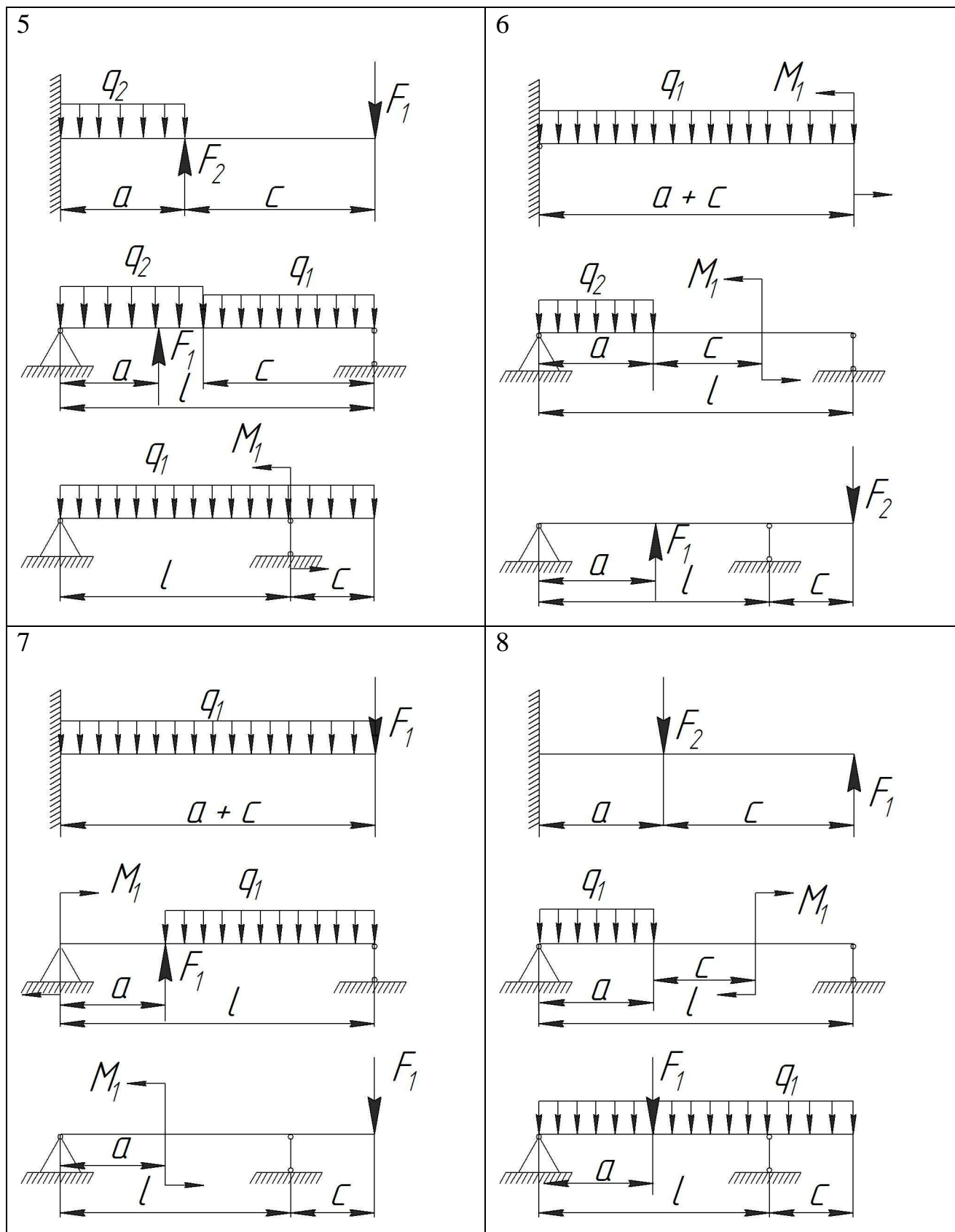


Рис. 3.8

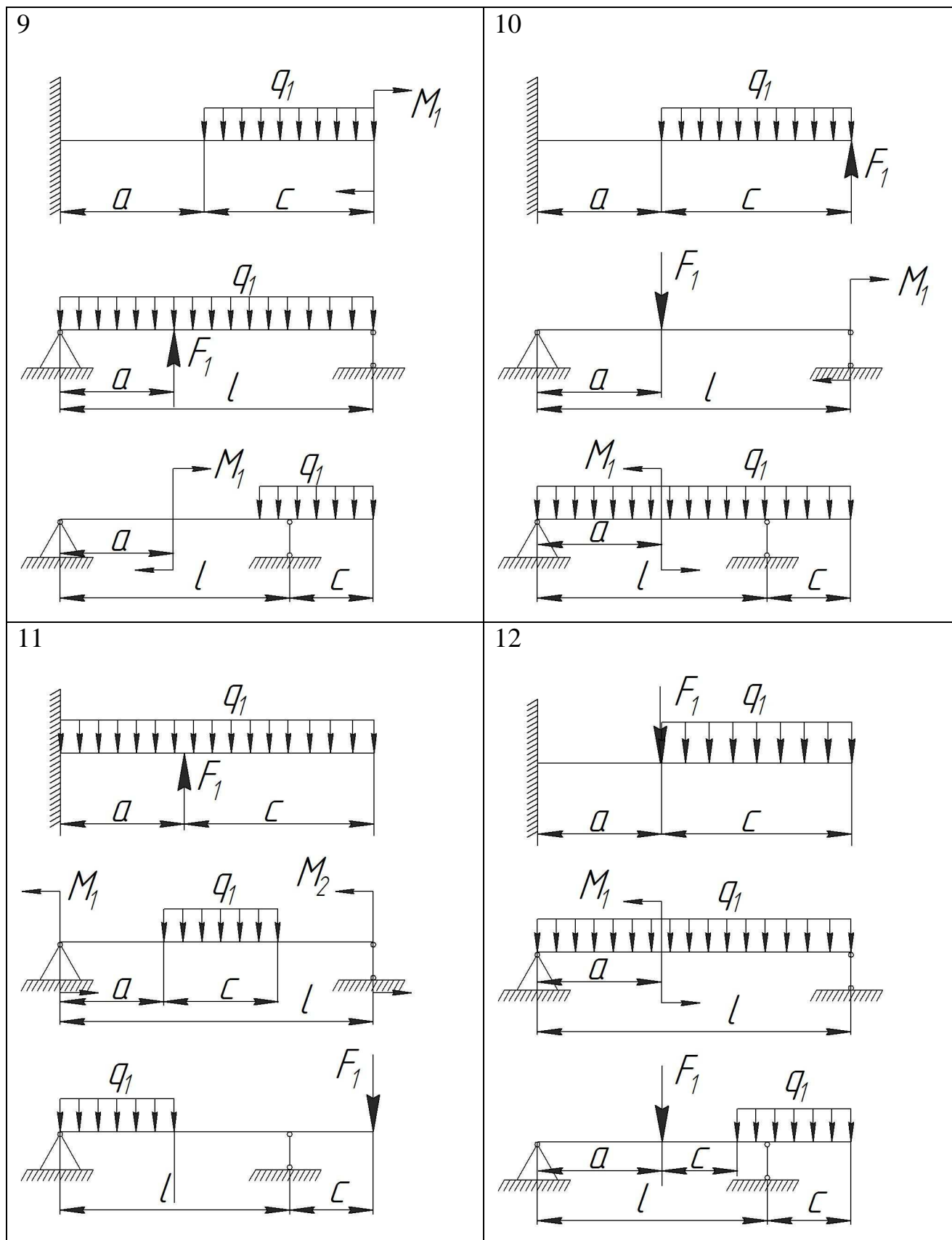


Рис. 3.9

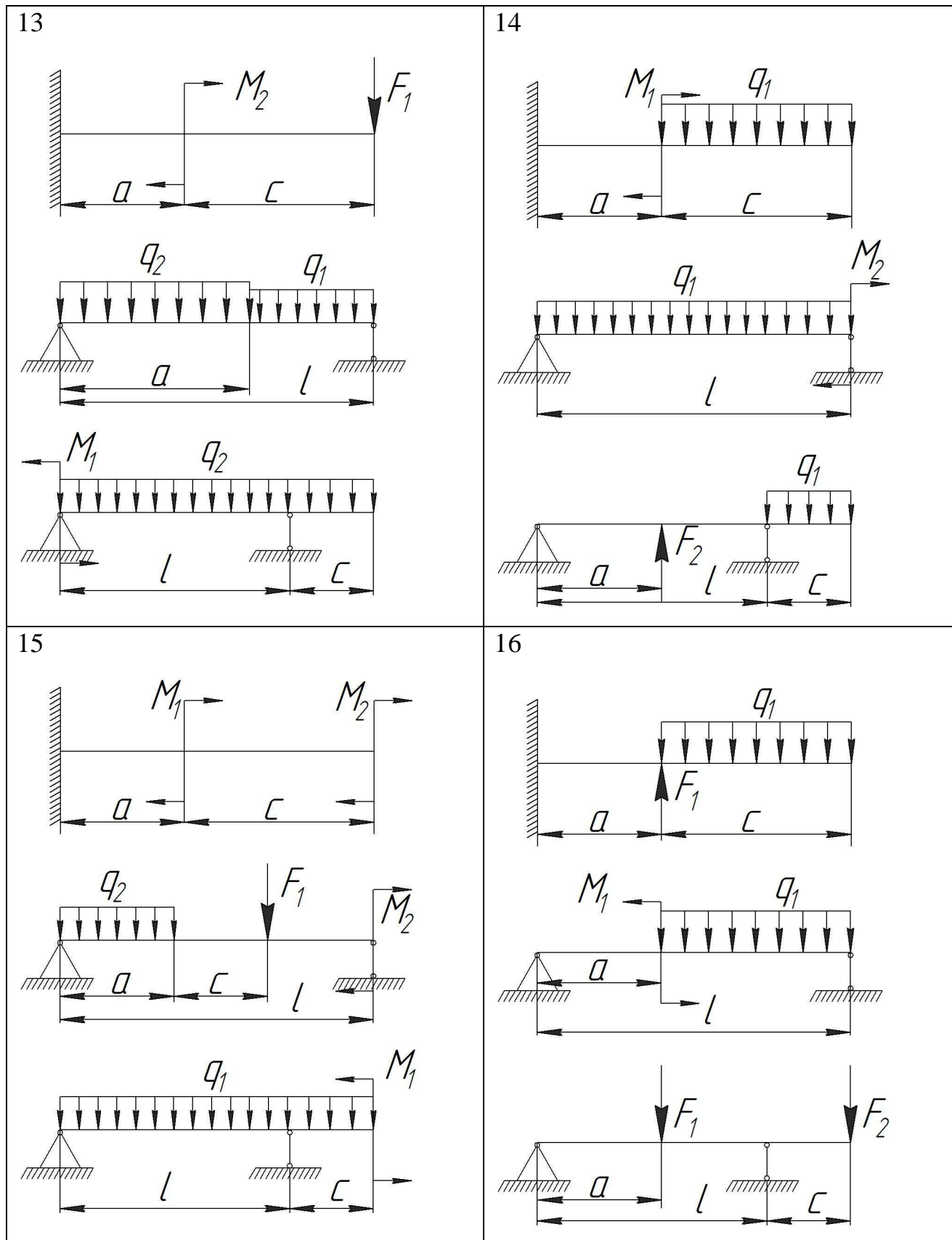


Рис.3.10

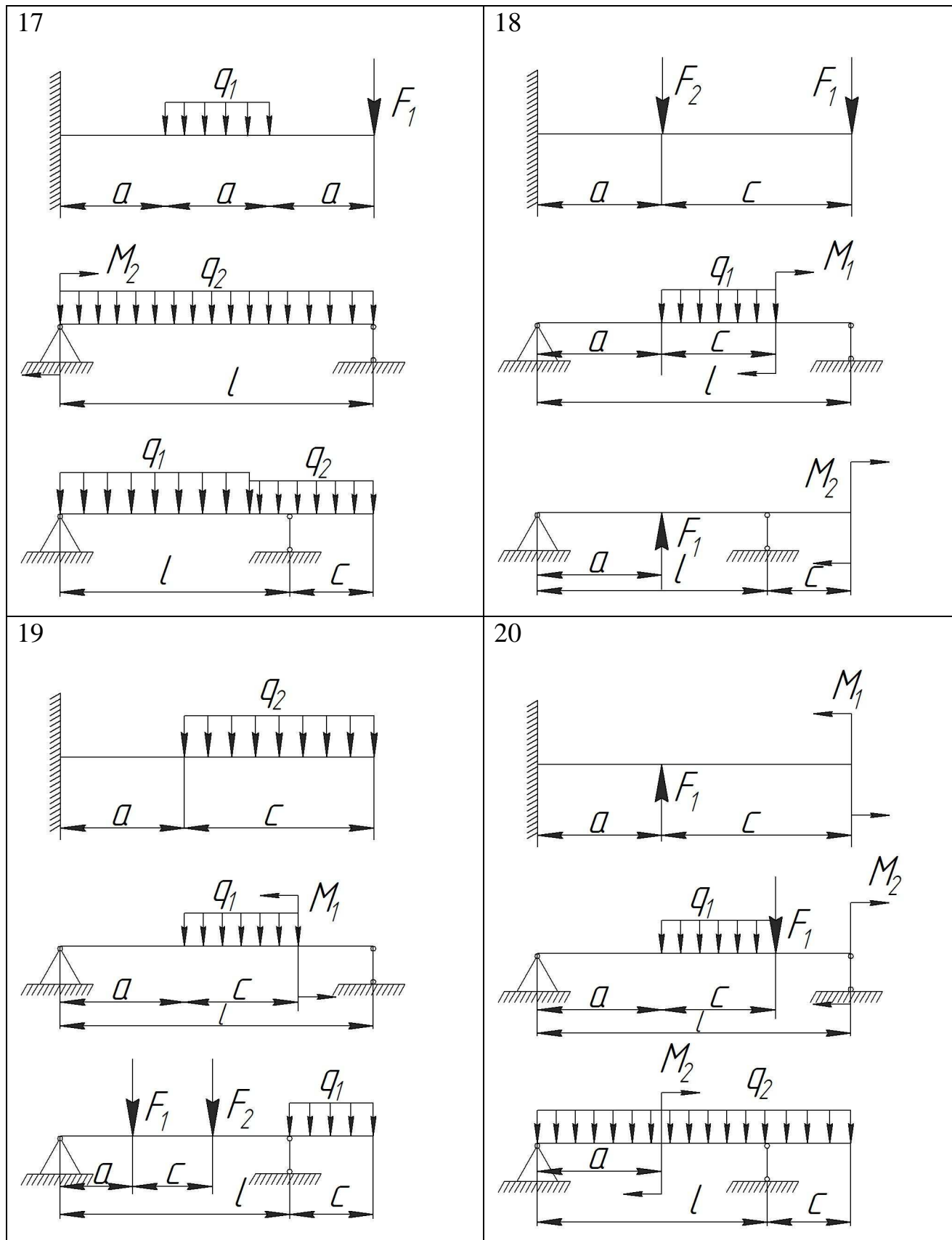


Рис. 3.11

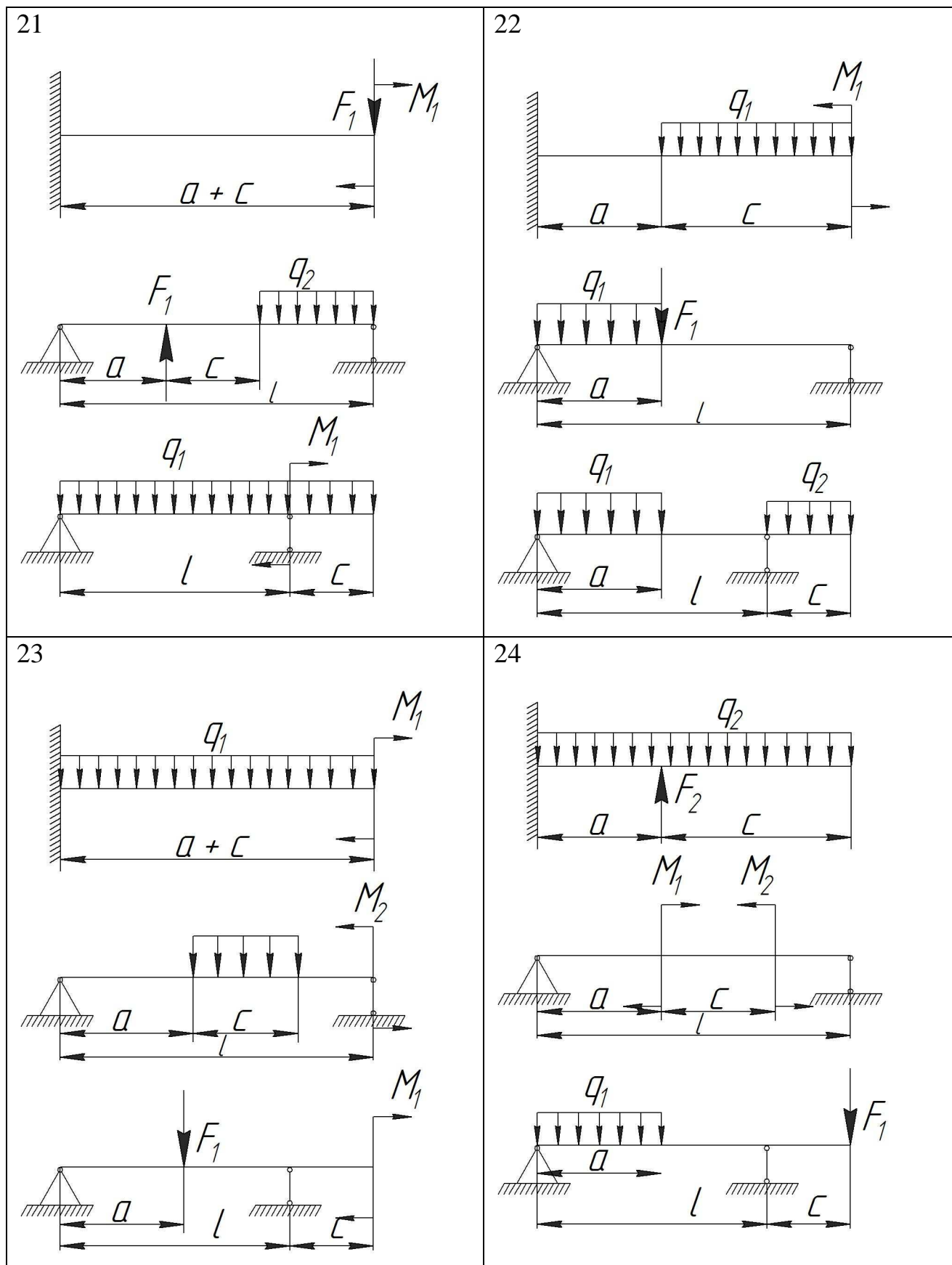


Рис. 3.12

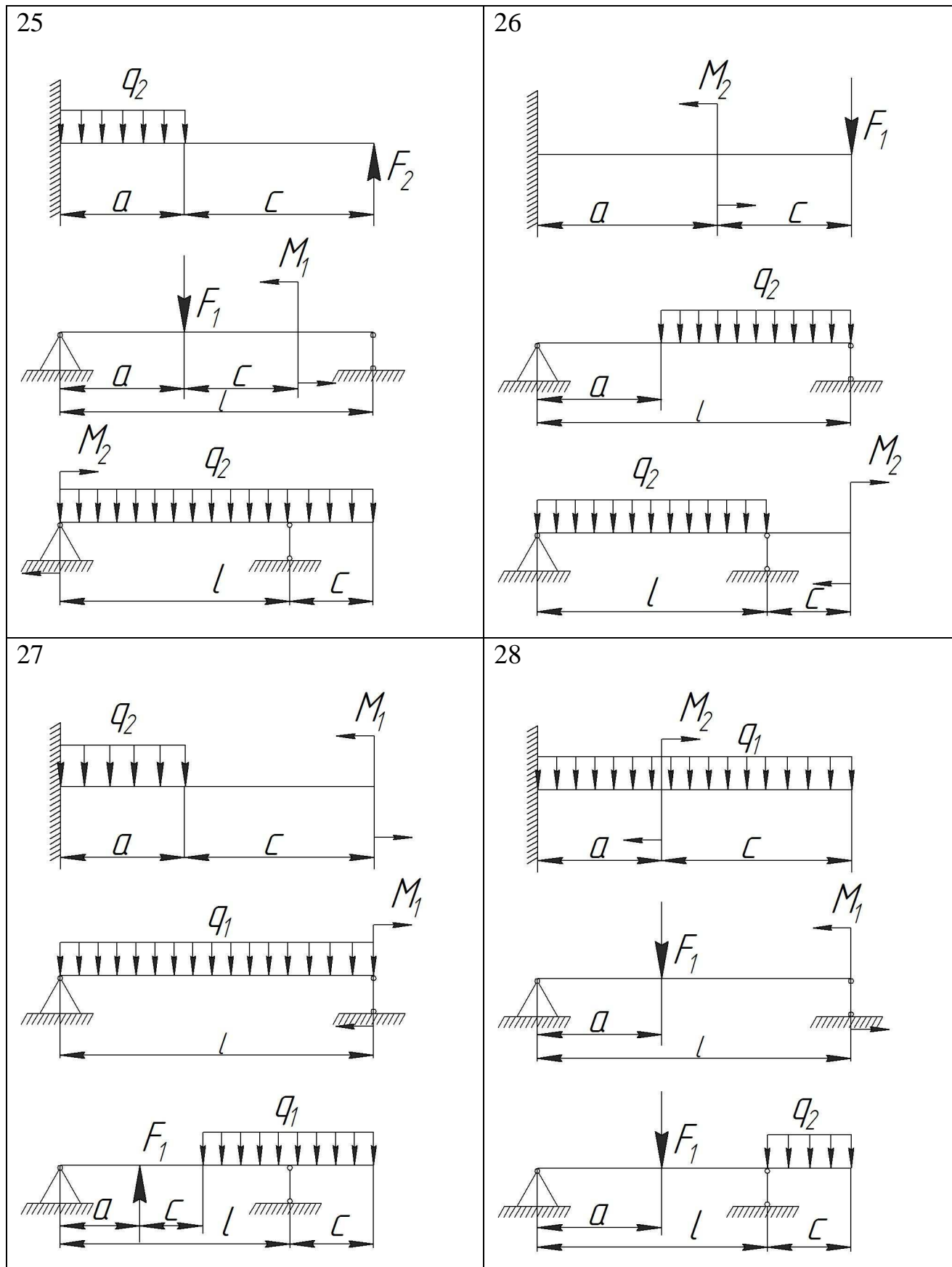


Рис. 3.13

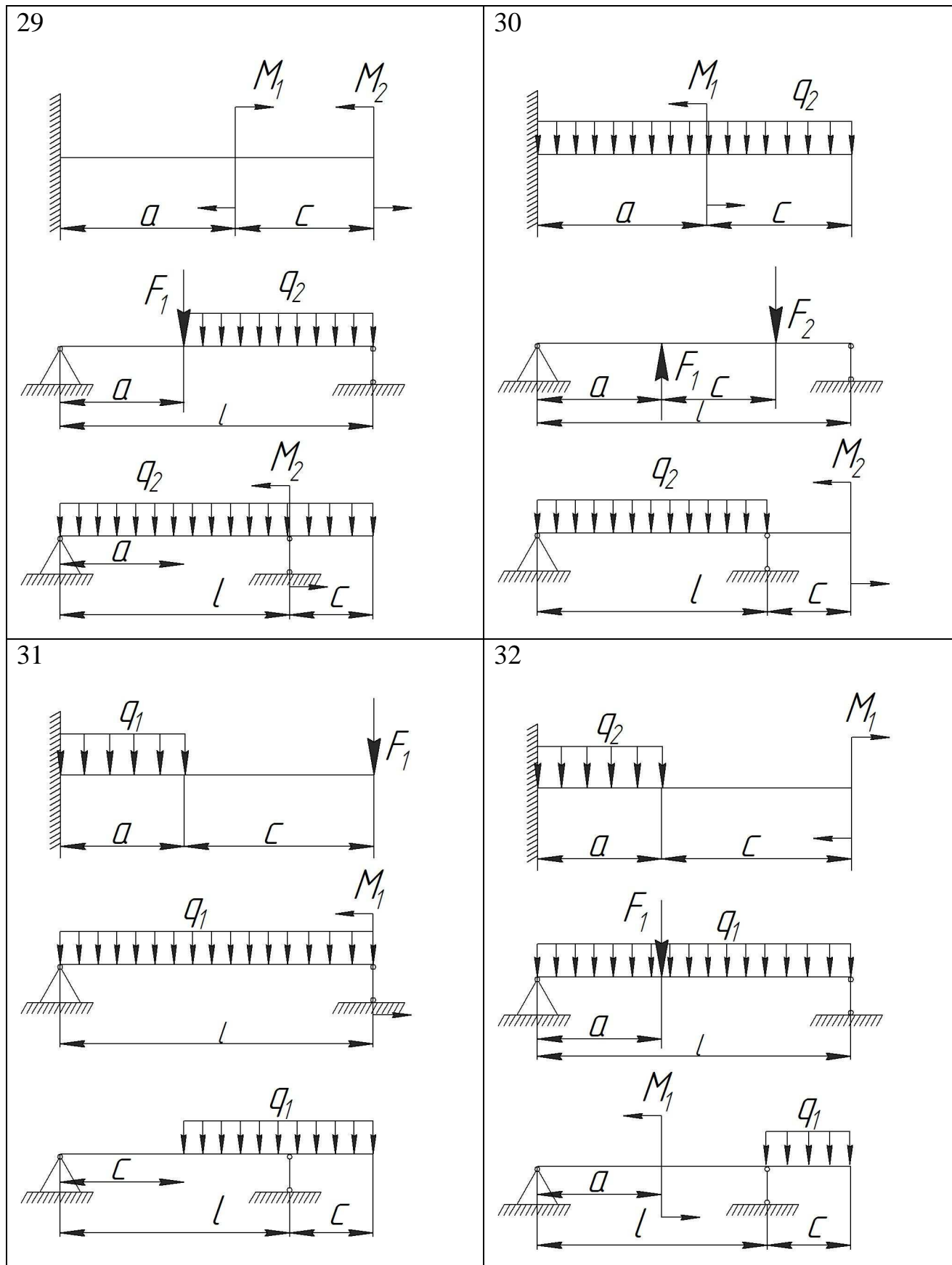


Рис. 3.14

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1.Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. "Опір матеріалів." – К.: Вища школа, 1993.
- 2.Дарков А.И., Шпиро Г.С. "Сопротивление материалов." – М.: Высшая школа, 1975.
- 3.Беляев Н.М. "Сопротивление материалов." – М.: Высшая школа, 1976.
- 4.Методичні вказівки і завдання для виконання розрахунково-графічної роботи "Розрахунок напружень в деталях машин при стаціонарних навантаженнях" з курсу прикладної і технічної механіки (для студентів 2 курсу спеціальностей ЕТ , ТС). Укл. Шпачук В.П., Кузнєцов О.М. – Харків: ХДАМГ, 2001. – 47с.

ЗМІСТ

	Стор.
1. Розтяг (стиск) прямих стержнів.....	4
1.1 Приклад виконання завдання.....	6
1.2 Завдання до теми 1.....	14
2. Кручення прямих валів.....	16
2.1 Приклад виконання завдання.....	17
2.2 Завдання до теми 2.....	24
3. Згин балок зі сталюю по всій довжині площиною перерізу.....	30
3.1 Приклад виконання завдання.....	33
3.2 Завдання до теми 3.....	39
Список літератури.....	48

Навчальне видання

Методичні вказівки для самостійної роботи з розділу "**Основи розрахунку на міцність**" курсу прикладної механіки (для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 6.050702 "Електромеханіка" та для слухачів другої вищої освіти).

Укладачі: Шпачук Володимир Петрович,
Кузнєцов Олександр Миколайович

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2007, поз. 269 М

Підп. до друку 27.09.07

Формат 60x84 1/16

Друк на ризографі.

Ум. друк. арк. 2,8

Зам. №

Тираж 300 пр

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001